Maria Adelaide Estevens Rala Filipe

Licenciatura em Matemática – Ramo Educacional

A Taxonomia SOLO nos Exames Nacionais de Matemática – 9º Ano

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: José Manuel Leonardo de Matos, Professor da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
Co-orientador: Maria de Fátima Vale de Gato Santos Rodrigues, Professora da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos
Arguente: Prof. Doutora Maria da Conceição Monteiro da Costa
Vogais: Prof. Doutora Maria da Conceição Monteiro da Costa
Prof. Doutor José Manuel Leonardo de Matos
Prof. Doutora Maria de Fátima Vale de Gato Santos Rodrigues

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

[Setembro - 2011]

LOMBADA

A Taxonomia SOLO nos Exames Nacionais de Matemática – 9º Ano

Maria Adelaide Estevens Rala Filipe

2011

Maria Adelaide Estevens Rala Filipe

Licenciatura em Matemática – Ramo Educacional

A Taxonomia SOLO nos Exames Nacionais de Matemática – 9º Ano

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: José Manuel Leonardo de Matos, Professor da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
Co-orientador: Maria de Fátima Vale de Gato Santos Rodrigues, Professora da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos
Arguente: Prof. Doutora Maria da Conceição Monteiro da Costa
Vogais: Prof. Doutora Maria da Conceição Monteiro da Costa
Prof. Doutor José Manuel Leonardo de Matos
Prof. Doutora Maria de Fátima Vale de Gato Santos Rodrigues

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

[Setembro - 2011]

Copyright

Dedicatória:

Partiu a pensar que eu cá não ficaria por muito mais tempo e sem ver concretizado o seu sonho …
Apesar de tanto empenho, nunca ninguém o ouviu reclamar …
A sua atitude dá-me força para vencer os muitos obstáculos que têm surgido na minha vida.
Continuarei a fazer valer a sua vontade.
Onde quer que esteja quero que sinta orgulho em mim.

Agradecimentos:

O meu trabalho teve a ajuda preciosa dos professores José Matos, Fátima Rodrigues e Mário Ceia que fizeram o favor de me dar atenção, aconselhar e mostrar sempre uma grande disponibilidade para trabalhar em grupo.
Os meus familiares viram-se privados da minha companhia por longos períodos sem, contudo, se queixarem e procurando aliviar-me de muitas tarefas.
A todos o meu obrigado.

Sumário

Termos chave: Categorizar, Questões, Exames, Taxonomia, SOLO.

O ser humano nasce com um complexo sistema sensorial, interage com o mundo para construir e coordenar, cada vez mais, relações sofisticadas entre percepção e acção e construir conceitos elaborados.

Diferentes tipos de conhecimento podem ser definidos, tendo em consideração a sua aprendizagem, a sua manipulação em termos teóricos e/ou práticos, as suas relações conceituais e o contexto em que está inserido.

Biggs e Collis dividem as formas de conhecimento em quatro tipos distintos: conhecimento tácito, que pode ser verbalizável ou não e manifesta-se no acto de fazer; conhecimento intuitivo, o que é directamente sentido e percebido; conhecimento declarativo, expresso através de símbolos e de forma inteligível; e conhecimento teórico, que corresponde a um conhecimento mais inteligível que o anterior e que pode atingir alto nível de abstracção.

Com base em argumentos de Piaget, Biggs e Collis (1982) desenvolveram uma teoria denominada Taxonomia SOLO. Esta teoria é a chave capaz de descrever com eficácia, o processo envolvido na pergunta e resposta a questões que crescem numa escala de dificuldade ou complexidade, assim como fornecer parâmetros para analisar e classificar questões sobre vários conteúdos escolares.

O objectivo principal deste trabalho foi analisar e classificar questões dos exames nacionais de Matemática do 9º ano de escolaridade: 2005/1ª chamada, 2006/1ª chamada, 2007/2ª chamada, 2008/1ª e 2ª chamada, 2009/1ª chamada e 2010/2ª chamada, com recurso a um modelo de categorização de questões construído com base na Taxonomia SOLO.

Abstract

Keywords: Categorize, Questions, Tests, Taxonomy, SOLO.

The human being borns with a complex sensory system interacts with the world in a way to build and coordinate sophisticated relationships between perception and action and to build elaborated concepts.
Different types of knowledge can be defined, taking their learning into account, their theoretical and/or practical manipulation, their conceptual relationships and the context in which it appears.
Biggs and Collis divided the knowledge forms into four distinct types: tacit knowledge, which can be verbalizable or not, and is manifested in the act of doing; intuitive knowledge, which is directly felt and perceived; declarative knowledge, expressed through symbols and intelligibly; and theoretical knowledge, which corresponds to a more readable knowledge than the previous one and can achieve high level of abstraction.
Based on arguments of Piaget, Biggs and Collis (1982) developed a theory called SOLO Taxonomy. This theory is the key that can effectively describe the process involved in the question and answer to matters that grow on a scale of difficulty or complexity, and provide parameters to analyze and classify various questions about school contents.
The main goal of this work was to analyze and classify the issues of national examinations in mathematics from the 9 th grade: 2005/1 st call, 2006/1 st call, 2007/2 nd call, 2008/1 st and 2 nd call, 2009/1 st call and 2010/2 nd call, using a model of categorization of questions which was built according to the SOLO Taxonomy.

Índice de Matérias

Índice de Tabelas

Capítulo 2 – Avaliação das Aprendizagens no Ensino Básico

Capítulo 4 – SOLO como Metodologia de Análise de Questões

Capítulo 5 – Análise de Exames

Capítulo 1 – Introdução

Objectivos

O meu trabalho pretende apreciar a "qualidade" das provas de avaliação externa – exames portugueses de âmbito nacional do 9º ano de escolaridade – que regulam o processo de ensino e aprendizagem da Matemática no final do Ensino Básico.

Estes exames surgiram a partir de Junho de 2005 e ocorrem, desde então, em cada ano lectivo em duas chamadas. Escolhi um exame por ano: 2005/1ª chamada, 2006/1ª chamada, 2007/2ª chamada, 2008/1ª e 2ª chamada, 2009/1ª chamada e 2010/2ª chamada. Vou querer analisar as duas chamadas do ano 2008 para as poder comparar em termos de exigência e complexidade já que, na altura, a 1ª chamada/2008 foi muito criticada por ter muitas questões que podem ser resolvidas por alunos de níveis de escolaridade inferior e outras que evocam raciocínios e resoluções muito simples para um aluno em final de 3º ciclo de estudos.

Na minha pesquisa decidi utilizar um modelo de caracterização de questões, da autoria de Mário Ceia, que me vai permitir diferenciar a complexidade de cada uma das questões dos sete de doze exames que se encontram disponíveis na página do Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE) do Ministério da Educação. O sistema de categorias para identificar patamares de formalização do pensamento proposto por Biggs e Collis (1982) em sua teoria conhecida como Taxonomia SOLO, foi o suporte para a construção deste modelo de análise e caracterização que o Mário Ceia tem vindo a apresentar e reformular. O quadro modelo que consta deste trabalho tem em conta a quantidade de conhecimentos envolvidos na abordagem de cada questão, a complexidade do raciocínio envolvido e o tipo de solução requerida. É à luz deste quadro que farei a análise, interpretação e categorização de cada uma das questões destes exames. Com base em respostas "idealizadas", procurarei verificar se em cada um dos exames as questões são diversificadas relativamente às categorias (níveis) que foram estabelecidas, bem como em relação aos domínios temáticos que constam do programa DEB – ME, 2001/02 e farei algumas comparações, considerações e conclusões sobre todo o trabalho realizado.

De início proponho-me fazer uma abordagem geral e teórica, nomeadamente sobre o ensino e aprendizagem da Matemática e os processos de avaliação das aprendizagens na disciplina, a teoria SOLO e seu uso em pesquisas ligadas à educação escolar.

O ensino da Matemática como fenómeno social

O ensino da matemática tem diversas funções sociais. Esta disciplina serve de base ao desenvolvimento de uma cultura científica e tecnológica, principalmente através das pessoas que se ocupam do desenvolvimento e manutenção dessa cultura. Constitui a «coisa mais importante» para matemáticos puros e aplicados que têm diversas especialidades, e é um instrumento fundamental para cientistas, engenheiros e técnicos que a usam intensamente na sua actividade profissional.

Dada a grande variedade das suas aplicações e a imagem de ”conhecimento objectivo” que adquiriu, a matemática assume o papel de principal instrumento de selecção para numerosos cursos superiores, embora existam outras disciplinas escolares e diversos tipos de provas que se podem usar para a selecção de candidatos a determinado curso. A verdade é que este papel de instrumento fundamental de selecção é visto como um obstáculo e tem prejudicado a relação dos jovens com a matemática.

A Matemática serve para promover o desenvolvimento de crianças e jovens, estimulando uma maneira de pensar importante para a vida social e para o exercício da cidadania. Este é o plano em que a matemática serve as necessidades de todos os indivíduos como seres sociais, onde se incluem os aspectos mais utilitários da matemática, como ser capaz de fazer pagamentos e trocos, calcular distâncias, a área de uma sala, etc. Mas, os aspectos que justificam a importância do ensino da disciplina são a capacidade de entender a linguagem matemática usada na vida social e a capacidade de usar um modo de pensar a matemática em situações de interesse pessoal, cultural, cívico e profissional. Cada um destes papéis sociais da Matemática tem o seu grupo de porta-vozes e cada um deles remete-o para diferentes tipos de finalidades. Até certo ponto é inevitável que todas as finalidades coexistam. Mas, a finalidade primordial da Matemática não fica determinada pelo que se diz nos documentos oficiais e nos programas emitidos pelo Ministério de Educação. Os manuais escolares, a cultura profissional dos professores e o sistema de avaliação das aprendizagens podem influenciar de tal modo as práticas de ensino, que as finalidades visadas pelo currículo à data em vigor, muitas vezes, pouco têm a ver com aquilo que é dito nos textos oficiais (Ponte. J. 2003).

O ensino da matemática desenvolve-se em torno de um triângulo didáctico cujos vértices são a matemática, o aluno e o professor. Este triângulo não é imóvel, existe num dado contexto social e institucional, a sociedade, a comunidade a que o aluno pertence e que tem a sua própria cultura, a instituição escolar e tem a sua dinâmica associada aos objectivos curriculares do professor.

A matemática é um campo do saber com características próprias, marcadas pela sua tendência para a generalização, a abstracção e a formalização. No entanto, a matemática tem evoluído ao longo do tempo e nos últimos anos, depois de muitas hesitações, parece ser finalmente aceite as novas tecnologias no seu ensino. O campo das aplicações da matemática expandiu-se. As características da matemática escolar, embora relacionadas com as da matemática que se pratica na investigação, não são rigorosamente as mesmas. As finalidades da ciência e da escola são diferentes e isso tem necessariamente os seus reflexos no conhecimento matemático que é adquirido.

Os jovens mudaram profundamente na sua composição social, nos interesses que têm, nas suas solicitações, nos estilos de vida e valores culturais. O ambiente de uma aula de hoje, em qualquer nível de ensino, é muito diferente do de uma aula há décadas atrás. Há que compreender quem é o aluno de hoje, o que pensa, o que gosta de fazer e procurar, e a partir dai organizar um ensino a si apropriado. O aluno é o interveniente fundamental no processo de ensino e aprendizagem, e só lhe desperta o gosto por aprender se ele é capaz de se envolver profundamente na aprendizagem.

O professor tem de conhecer bem a matemática que quer ensinar e tem de conhecer, igualmente bem, as características dos seus alunos e o seu contexto de trabalho. O seu papel na Gestão Curricular requer grande criatividade pedagógica. Conceber tarefas diversificadas, produzir materiais de uso, criar situações de aprendizagem, gerir o ambiente da sala de aula e avaliar os alunos são funções de elevada complexidade.

Todo o ensino e aprendizagem se desenrola num determinado contexto e este exerce um papel decisivo. É o grupo disciplinar, com os seus projectos e a sua dinâmica, é a escola com a sua cultura, são as relações que a escola mantém com a comunidade, é o sistema educativo com as suas regras e condicionantes, onde se incluem as provas de avaliação externa, chamadas de Exames Nacionais, é o debate que se desenrola na sociedade em torno da Educação, e em particular nos meios de comunicação. Tudo isto tem uma influência fortíssima sobre os professores e os alunos e condiciona as suas margens de actuação.

Como consequência o ensino da matemática é um processo social que tem de ser equacionado em várias vertentes. O seu grande desafio é estabelecer uma ligação viva entre a matemática e o aluno. Para isso, a matemática escolar tem de ser genuína onde os interesses, necessidades e capacidades dos diferentes tipos de alunos e níveis etários, têm de ser tidos igualmente em consideração. O contexto educativo e a sociedade, exercendo um papel significativo no ensino, devem proporcionar condições favoráveis para o sucesso.

A aprendizagem da matemática é um processo complexo, que se desenvolve em momentos diversificados, onde podem predominar a exploração, a formalização e a integração das ideias matemáticas. Ouvir o professor e praticar a resolução de exercícios permite adquirir algumas competências matemáticas mas, não permite adquirir as mais importantes. Para isso, o ensino e aprendizagem tem de envolver os alunos em outros tipos de experiências e situações, como a exploração, a investigação, a resolução de problemas, a realização de ensaios e projectos, a comunicação oral ou escrita e a discussão. Aprender resulta sobretudo de fazer e de reflectir sobre o que se fez, requer um investimento cognitivo e afectivo, requer perseverança e vontade de aprender. Criar as condições para que isso aconteça, desafiando os alunos e diversificando as situações de aprendizagem, é responsabilidade do professor.

A matemática no currículo do ensino básico

A Matemática é usada na sociedade de forma crescente, em ligação com as mais diversas áreas da actividade humana mas, ao mesmo tempo, a sua presença é frequentemente mais implícita do que explicita. A educação em matemática tem o objectivo de ajudar a revelar a matemática que está presente nas mais variadas situações, promovendo a formação de cidadãos participativos, críticos e confiantes nos modos como lidam com a Matemática.

A partir de finais do século passado surgiu, de forma inequívoca, uma forte orientação curricular, em termos de ensino e aprendizagem desta disciplina. Aprender Matemática é um direito básico de todas as crianças e jovens, e uma resposta a necessidades individuais e sociais. A Matemática faz parte dos currículos, ao longo de todos os anos de escolaridade básica obrigatória, por razões de natureza cultural, prática e cívica.

Esta orientação vem até aos dias de hoje, não perdendo actualidade, mas antes sendo reforçada como se pode ler no texto das finalidades do ensino da disciplina no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico: “Certamente também mais do que nunca, se exige da escola uma formação sólida em Matemática, para todos os alunos: uma formação que permita aos alunos compreender e utilizar a Matemática, desde logo ao longo do percurso escolar de cada um, nas diferentes disciplinas em que ela é necessária, mas igualmente depois da escolaridade, na profissão e na vida pessoal e em sociedade” (Novo Programa de Matemática, 2007, p. 3).

Como disciplina escolar e em estreita articulação com as restantes disciplinas, a Matemática contribui para o desenvolvimento das competências gerais definidas para o ensino básico: desenvolver a confiança em si próprio, a curiosidade e o gosto de aprender, hábitos de trabalho e persistência, o espírito de cooperação e inter-ajuda, a comunicação, o cálculo e o raciocínio para utilizar a matemática em situações reais.

Partilhando muitos aspectos com outras disciplinas, a Matemática está também associada a métodos próprios de estudar, de pesquisar e de organizar a informação, assim como de resolver problemas e de tomar decisões, que enriquecem a formação geral dos alunos. A combinação adequada da Matemática com outras áreas do currículo do ensino básico, deverá traduzir-se num crescimento do aluno tanto do ponto de vista da autonomia, responsabilidade e criatividade como na perspectiva da cooperação e solidariedade. A matemática constitui uma área de saber plena de potencialidades para a realização de projectos e actividades interdisciplinares dos mais diversos tipos.

De acordo com o Programa de Matemática 2001/02 e ainda hoje em vigor no 8º e no 9º ano de escolaridade, as orientações relativas ao desenvolvimento da competência matemática ao longo do ensino básico foram organizadas em quatro domínios temáticos: Números e Cálculo; Geometria; Estatística e Probabilidades; Álgebra e Funções.

Todos os alunos devem adquirir uma compreensão global do número e das operações a par de usar essa compreensão de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e operações. Este sentido do número não é algo que se aprenda de uma vez por todas numa dada fase do percurso escolar dos alunos mas sim uma competência genérica que se desenvolve ao longo de todo o ensino básico. Não basta aprender procedimentos, é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

No domínio da Geometria salientam-se as competências matemáticas que todos devem desenvolver: a aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e em outras áreas da Matemática; a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente; a aptidão para realizar construções geométricas simples, assim como identificar propriedades de figuras geométricas, a compreensão de comprimento e perímetro, área, volume assim como a aptidão para utilizar estes conhecimentos na resolução e formulação de problemas; a sensibilidade para apreciar a geometria do mundo real e o reconhecimento de ideias geométricas em diversas situações (ME/DEB, 2001).

O estudo da Estatística e das Probabilidades constitui uma ferramenta imprescindível em diversos campos de actividade científica, profissional, política e social. É importante que os alunos desenvolvam capacidades associadas à recolha, organização, análise, representação e interpretação de dados, assim como à comunicação de processos e resultados. Estas actividades de recolha, organização e análise de dados são especialmente propícias ao estudo de situações de natureza interdisciplinar.

O exacto e o aproximado, a procura de uma lei para o aleatório, estão presentes na abordagem intuitiva que se faz de Probabilidades, onde o aspecto lúdico da Matemática ganha força e a Estatística é vista com novo significado.

Os alunos constroem a álgebra a partir da sua aritmética, ou seja, dão sentido aos símbolos e às operações da álgebra em termos dos conhecimentos aritméticos. A competência matemática em Álgebra e Funções, promove a mobilização de saberes para compreender a realidade e para abordar situações e problemas. Ao mesmo tempo, proporciona instrumentos que favorecem o uso de linguagens adequadas para expressar ideias. Com efeito, a Matemática distingue-se de todas as outras ciências, em especial no modo como encara a generalização e como combina o trabalho experimental com o raciocínio indutivo e dedutivo, oferecendo um contributo único como meio de pensar, de aceder ao conhecimento e de comunicar.

Uma componente essencial da formação matemática é a exploração de conexões, na medida em que permite a compreensão de relações entre ideias matemáticas, tanto entre os diferentes temas da matemática como no interior de cada tema, possibilitando modos diferentes de pensar sobre uma dada situação problemática e de a resolver (ME/DEB, 2001).

Todos os alunos devem aprender a utilizar a calculadora. Ter oportunidade de trabalhar com a folha de cálculo e com programas educativos, nomeadamente de gráficos de funções, de geometria dinâmica, assim como de utilizar a *internet* para actividades de investigação e desenvolvimento de projectos. A utilização de materiais manipuláveis é útil como ponto de partida ou suporte para a concretização de muitas tarefas escolares, em particular para promover actividades de investigação e a comunicação matemática. A prática de jogos, em particular de jogos de estratégia, de observação e de memorização, contribui de forma articulada para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para o crescimento pessoal e social (ME/DEB, 2001).

Capítulo 2 – Avaliação das Aprendizagens no Ensino Básico

O conceito de avaliação

A avaliação das aprendizagens dos alunos pode ser entendida como "todo o acto intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua directamente para a progressão e/ou redireccionamento dessa aprendizagem" (Santos, 2002, p. 77).

No *Currículo de Matemática do Ensino Básico* (DGEBS, 1991), a avaliação é considerada parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, com função de o regular e orientar, assumindo um carácter eminentemente formativo, pelo que as tarefas de avaliação propostas aos alunos são também tarefas de aprendizagem, e estes devem ser envolvidos activamente na avaliação para que possam melhorar as suas aprendizagens. Ao professor cabe o papel de definir prioridades, de acordo com as experiências que desenvolve e praticar uma avaliação que se debruce sobre os processos e a actividade dos alunos e que vise a orientação do ensino e das aprendizagens. Uma avaliação que apresente um carácter sistemático e contínuo e, dependendo da natureza e dos contextos de aprendizagem, utilize diversos instrumentos de recolha de informação.

A observação e a interpretação de dados, acompanhadas por registos que possibilitem no imediato uma ajuda ao aluno que lhe permita ultrapassar dificuldades, toma no contexto da avaliação formativa um papel primordial, pois vai ao encontro do carácter essencialmente formativo que a avaliação deve tomar.

Uma das formas de operacionalizar a avaliação formativa das aprendizagens, é através do retorno de informação que o professor dá ao trabalho dos alunos. Este é um requisito essencial para haver progressos na aprendizagem. A qualidade do diálogo entre o professor e o aluno é muito importante para assegurar o funcionamento de um processo de comunicação eficaz, isto é, onde os alunos e os professores se entendem mutuamente, com uma simbologia que todos sabem identificar.

Conhecer e dar apoio adequado ao perfil académico de cada aluno revela-se um trabalho exigente e consumidor de muito tempo, além de que, como é referido por Pinto e Santos (2006) "o facto de a avaliação formativa estar mais próxima dos processos de aprendizagem, isto é, do trabalho quotidiano, leva os professores a olharem-na como algo de difuso e pouco claro no que respeita à construção de informações credíveis e utilizáveis" (p. 98) para construir um juízo avaliativo traduzido numa nota final. Assim sendo, são os testes ditos "tradicionais" e os exames nacionais que continuam a mostrar-se os principais elementos utilizados por professores, pela administração educativa e aceites pela sociedade em geral, para avaliar o desempenho dos estudantes (Kulm, 1990; Santos e Menezes, 2008).

A avaliação formativa

A avaliação formativa nem sempre foi vista do mesmo modo, ao longo do tempo, isto é, não existe um significado único e consensual de avaliação formativa. Contudo, em todos os momentos foi-lhe atribuída uma função pedagógica, que não se limita à observação, mas ao desencadear de uma intervenção em todas as actividades desenvolvidas pelos professores e alunos, que fornecem informação a ser usada como retorno para modificar a actividade de ensinar e aprender. Para procurar compreender de forma mais aprofundada o significado de avaliação formativa, é necessário ter um olhar mais amplo sobre o campo educativo, tomando em linha de conta o que em cada momento se entende por ensinar e aprender (Pinto e Santos, 2006). A avaliação não constitui uma componente isolada e dissociada de todo o processo educativo, ela é parte inseparável de um complexo sistema onde o fim último do acto educativo é a aprendizagem do aluno.

Com o evoluir no tempo, a avaliação formativa não ficou circunscrita apenas aos momentos formais de avaliação durante o ano lectivo, está cada vez mais presente no quotidiano da sala de aula, nos momentos das actividades de aprendizagem e de reflexão sobre essas aprendizagens. É a intenção de compreender e apoiar ao aluno que dá à avaliação uma natureza formativa. Contudo, ela só será verdadeiramente formativa ou mediadora se, para além da intenção, existirem implicações para a aprendizagem do aluno.

A avaliação formativa vê no aluno um papel central. Não deixando de ser essencial o papel do professor, este passa sobretudo a assumir a responsabilidade de construir e propor contextos favoráveis e adequados de aprendizagem, e de gerir e orientar o aluno no desenvolvimento de tais contextos. Ao aluno, por meio de uma interacção social facilitadora, exige-se que vá evoluindo nos seus processos mentais e mudando a sua maneira de pensar de forma estável e por sua própria acção. Esta mudança faz-se através de situações desafiantes e intelectualmente exigentes, tais como a resolução de problemas.

O objectivo da avaliação formativa é, acima de tudo, ajudar a compreender o funcionamento cognitivo do aluno face a uma situação proposta pelo professor. A recolha desta informação por parte do professor não é, contudo, por si só suficiente para que aconteça um acto de avaliação formativa. Deve seguir-se uma interpretação da informação recolhida, da qual decorrerá uma intervenção de natureza orientadora. Esta acção do professor pode incidir sobre diversos objectos, tais como sobre a clarificação entre os objectivos de aprendizagem e as tarefas a utilizar, sobre a explicitação/negociação de critérios de avaliação, para uma eficaz sua apropriação por parte dos alunos ou ainda, sobre a sistematização, interpretação e a tomada de consciência dos erros por eles cometidos na realização de uma tarefa.

Não é a correcção do resultado o foco de atenção da avaliação formativa, mas sim a interpretação que o professor dele faz, para procurar compreender os processos mentais dos alunos. É aliás, nesta perspectiva que o erro assume um valor de grande importância. O erro, enquanto fenómeno inerente à aprendizagem, apresenta-se como uma fonte rica de informação e cabe ao professor compreender a sua natureza, formular hipóteses explicativas do raciocínio do aluno e orientá-lo adequadamente, para que este seja capaz de o identificar e corrigir.

Toda a aprendizagem comporta dificuldades e erros, porque é um processo de reestruturação de representações prévias. Contudo, para que a aprendizagem aconteça e seja duradoura no tempo, é essencial que estes erros sejam reconhecidos e compreendidos não só pelo professor, mas fundamentalmente pelo aluno, cabendo a este último a sua correcção. Assim, o fim último da avaliação formativa é que seja o aluno a autoavaliar-se e a tomar a sua avaliação como meio de aprendizagem.

Uma abordagem positiva do erro, o questionamento oral, a explicitação e a negociação dos critérios de avaliação e o recurso a instrumentos diversificados de avaliação, são exemplos de mecanismos que podem ser implementados pelo professor, na prática de uma avaliação formativa, com potencialidades ao nível da auto-avaliação dos alunos e da auto-uniformização das aprendizagens.

A orientação dada pelo professor não deve, por isso, incluir a identificação nem a correcção do erro, mas antes questionar e apontar pistas de acção futura, de modo a que seja o aluno a consegui-lo (Santos, 2002). A solicitação da atenção do aluno para eventuais erros que possa ter cometido, pode ser feita pelo professor oralmente ou por escrito, e apresentar-se sob a forma de comentários com sugestões ou questões reflexivas. Mas, para que estas intervenções contribuam para o desenvolvimento da capacidade de auto-avaliação dos alunos, deve acontecer de forma continuada, promover uma postura de reflexão e auto-questionamento nos alunos e não incluir juízos de valor sobre o seu desempenho. São exemplos de intervenções que cumprem esses requisitos:

> "A estratégia que escolheste é adequada, mas deves procurar usar uma linguagem menos confusa. Porque não escreves … em vez de …?";
>
> "Experimenta com outros valores e analisa os resultados obtidos. O que concluis?";
>
> "Porque pensaste assim?";
>
> "Em que outras situações é que este processo se poderia aplicar?".
>
> (Santos, 2002)

O assinalar os erros como função do professor, deve ter uma notação clara para que o aluno a possa compreender, deve permitir que o aluno identifique o que está bem feito, detecte o erro e o corrija, deve apontar pistas de acção futura que o incentivem a prosseguir e a reanalisar a sua resposta, para que esse saber seja conscientemente reconhecido e a autoconfiança do aluno seja promovida.

A interacção entre professor e aluno, ao longo do processo de ensino e aprendizagem, é indispensável. O que diferencia os alunos entre si é, sobretudo, o ritmo com que cada um é capaz de aprender, isto é de se aproximar progressivamente dos objectivos pré-definidos. É, neste contexto que a avaliação formativa assume um papel essencial e estratégico, na melhoria da gestão do processo de ensino e aprendizagem. O diagnóstico e a orientação são, assim, duas componentes fundamentais nesta ideia de avaliação. A diferenciação pedagógica reduz-se sobretudo a dividir os alunos em dois grupos: os que necessitam de mais tempo, aos quais se propõem estratégias de remediação tais como mais tarefas do mesmo tipo, ou redução do ritmo de ensino e uma sua simplificação e, para aqueles que já atingiram os objectivos propõem-se tarefas de enriquecimento e aprofundamento.

A apropriação dos critérios de avaliação é essencial ao processo de auto-avaliação das aprendizagens, e cabe ao professor facilitar essa apropriação pelos alunos. De acordo com Santos (2002), o professor deve começar por definir e explicitar, para si próprio, quais os critérios que considera na avaliação da tarefa em causa e, posteriormente, partilhar esses critérios com os alunos. Esta partilha deve envolver os alunos no aperfeiçoamento dos critérios, através de um processo de negociação e deve ser feita em linguagem acessível aos alunos, para que estes possam compreender o que deles é esperado.

A avaliação formativa passa, então, a ser vista como um processo de acompanhamento do ensino e aprendizagem.

A avaliação formativa na prática lectiva

A interacção professor e aluno na sala de aula é, sem sombra de dúvida, uma prática comum, qualquer que seja o método de ensino seguido Ao falar de interacção que possa ser designada de formativa, isto é que seja contributiva para a aprendizagem, pensa-se em toda a interacção que apresente como características: ser intencional, ser participada pelos alunos e professor, considerar o erro sem estatuto diferenciado, não se destacando os que erram daqueles que acertam, privilegiar e respeitar diferentes modos de pensar, e reconhecer a turma como campo legítimo para a correcção de raciocínios e processos utilizados.

O questionamento oral, para além de ser talvez a prática lectiva mais frequente realizada em sala de aula, é uma forma com grande potencialidade de levar «ao terreno» uma avaliação formativa, uma vez que acontece a par com as experiências de aprendizagem, permite uma orientação no momento e recorre à forma mais habitual de comunicação entre professor e alunos – a forma oral. A sua responsabilidade pode deslocar-se do professor para o aluno, sem constrangimentos de qualquer espécie, para além de aumentar o nível de desenvolvimento da capacidade dos alunos para intervir.

A escrita avaliativa é outra forma possível de criar contextos de aprendizagem, que ajudem o aluno a ir desenvolvendo a capacidade de se auto-avaliar. A existência deste tipo de escrita, quando adequada a este objectivo, poderá construir uma estratégia facilitadora para o aluno ser levado a tomar consciência dos seus erros, e de os autocorrigir.

Existem dois tipos de escrita: a avaliativa e a descritiva. A primeira traduz-se, sobretudo num juízo de valor, com utilização implícita ou explícita de normas e dada a sua natureza, tem pouco efeito de natureza formativa. A segunda incide no trabalho do aluno e na tarefa proposta. A escrita descritiva subdivide-se, ainda, em dois tipos: a escrita que especifica o progresso e aquela que constrói o caminho a seguir. A primeira é da responsabilidade única do professor porque é ele que detém o controlo, o saber e a autoridade, para dizer ao aluno o caminho que tem de seguir para melhorar o seu trabalho. O segundo tipo de escrita, a descritiva desenvolve-se em colaboração com o aluno, através de uma partilha de poder e de responsabilidades.

Um estudo desenvolvido no âmbito do Projecto AREA, com alunos do 7º ano de escolaridade, em Matemática, evidencia que "o mesmo feedback escrito não serve da mesma forma todos os alunos. É importante conhecer os alunos e dar um feedback adequado ao perfil académico de cada um. Este estudo parece indicar que alunos com desempenho médio a matemática necessitam de um feedback mais descritivo e menos simbólico" (Santos e Dias, 2006, p.15). Para os alunos com elevado desempenho, o assinalar o erro através de uma simbologia parece ser suficiente para a sua compreensão. Já para alunos com maiores dificuldades, o assinalar o erro acompanhado de uma pista explícita parece ser necessário (Santos e Dias, 2006). Este modo de interagir pode contribuir para o aperfeiçoamento do desempenho dos alunos, e como tal para a sua aprendizagem, quando a escrita avaliativa se foca naquilo que é preciso ser feito para melhorar o desempenho e, em particular, quando são dadas indicações mais detalhadas sobre como proceder. Dever-se-á dosear a informação a dar, tanta quanto a necessária para o aluno conseguir avançar, mas não aquela que dá a resposta, inviabilizando uma situação potenciadora de aprendizagem. Dar a hipótese de ser o aluno a identificar os erros, ser ele próprio a corrigi-los e a chegar às respostas correctas, são estratégias que favorecem uma aprendizagem que perdure ao longo do tempo.

A auto-avaliação é levada a cabo pelo aluno e, permite-lhe regular os seus próprios pensamentos e aprendizagens. Assim, falar de auto-avaliação implica considerarem-se duas fases: uma primeira, onde o aluno deve conseguir confrontar o que fez com aquilo que se esperava que fizesse para corresponder à proposta de trabalho, e ter a percepção de que existe uma diferença entre estas duas situações, e uma segunda fase, em que o aluno deve ser capaz de agir de forma a reduzir ou eliminar essa diferença. Esta comparação faz-se com recurso a um conjunto de critérios de avaliação, que terão de ser comuns entre aluno e professor.

Os critérios desempenham um papel fundamental, tanto no processo de auto-avaliação, enquanto balanço do que se fez, como na tomada de decisões para a acção em função dessa avaliação. Contudo, os critérios por si só, não levam automaticamente a um desempenho mais eficaz. A explicitação de critérios de avaliação acompanhada, ou não, da sua negociação com os alunos é apenas uma primeira etapa, na construção de um contexto favorável para a apropriação por parte dos alunos desses mesmos critérios. Esta primeira etapa pode apresentar dois formatos: ou o professor apresenta e explica, tão claramente quanto possível, o sentido dos critérios de avaliação que irá usar na apreciação da qualidade de uma dada tarefa, ou predispõe-se a ouvir e atender à opinião dos seus alunos. Esta situação parece ser mais promissora, uma vez que envolve os alunos desde logo e, poderá ajudá-los a assumir um sentido de responsabilidade pelo processo que a seguir tomará lugar. O recurso a exemplos ilustrativos de trabalhos realizados por alunos, em anos anteriores e guardados pelo professor, poderá ser mais uma estratégia que facilite a compreensão do que se está a discutir. Posteriormente, corrigir e dar retorno aos trabalhos produzidos numa primeira fase, tendo em conta os critérios acordados é outra oportunidade a não perder. Com o tempo, os alunos vão-se apercebendo das diferenças entre o que realizam nos seus trabalhos e o que os critérios realmente advogam.

A apropriação de critérios de avaliação, juntamente com o desenvolvimento de uma capacidade crítica, inter-relacionam-se com um melhor desempenho, quer da realização das tarefas e dos respectivos relatórios, quer da capacidade de comunicar em Matemática. Esta relação não segue uma lógica sequencial. A aprendizagem e a auto-avaliação orientada são dois processos que se desenvolvem a par.

Em síntese, o investimento na componente reguladora da avaliação implica mudanças significativas na cultura de sala de aula tradicional (Santos, 2002). Em particular tais mudanças abrangem a intencionalidade e os sentidos atribuídos às práticas dos professores, a forma como são desenvolvidos e utilizados os instrumentos de avaliação, o ambiente de sala de aula e os novos papéis dos professores e dos alunos (Santos, 2003 a; 2005).

O raciocínio matemático

Os documentos curriculares de matemática apontam o desenvolvimento do raciocínio matemático como um objectivo central do ensino da matemática, e alertam para a necessidade de desenvolver essa capacidade nos alunos de forma consistente, recorrendo-se à sua utilização sistemática numa diversidade de contextos (NCTM, 2007; Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Sousa, Menezes, Martins e Oliveira, 2007).

O documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2007), destaca a importância de todo o aluno formular e investigar conjecturas, desenvolver e avaliar provas e argumentos matemáticos, bem como seleccionar e usar diversos tipos de raciocínio e métodos de demonstração reconhecendo-os como aspectos fundamentais da matemática.

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (2007) destaca, também, a importância dos alunos raciocinarem matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Neste documento, o raciocínio matemático, além de ser concebido como um objectivo de aprendizagem central, constitui-se como uma orientação metodológica importante para o professor estruturar as actividades a desenvolver em sala de aula.

Os alunos devem começar no início da escolaridade, pela justificação de passos e operações na resolução das tarefas e evoluir gradualmente para argumentações mais complexas, acabando por distinguir e apresentar generalizações, casos particulares e contra-exemplos, e por reconhecer e usar diferentes métodos de demonstração (NCTM, 2007; Ponte et. al., 2007). A brochura *A Experiência Matemática no Ensino Básico* (2008) defende que, desde os primeiros anos de escolaridade e desde que sejam proporcionadas as condições adequadas em aula, os alunos são capazes de raciocinar matematicamente, isto é, são capazes de explicar e de justificar os raciocínios usados durante o processo de resolução de uma tarefa matemática, de fazer generalizações a partir da análise de casos particulares, de compreender o que significa um contra-exemplo, de reflectir sobre o que constitui um argumento aceitável e adequado quando se trabalha em Matemática e de aplicar resultados gerais a exemplos específicos (Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel, 2008).

O professor, em particular, deve propor frequentemente a realização de actividades que exijam reflectir e raciocinar, com o intuito de ajudar os alunos a valorizar e a usar o poder do raciocínio matemático. Deve dar atenção aos raciocínios dos alunos e procurar que eles os explicitem com clareza. Através da discussão oral na aula, os alunos podem confrontar as suas estratégias de resolução das tarefas, assim como identificar e discutir os raciocínios elaborados pelos seus colegas.

Os problemas e os trabalhos de investigação, apresentam-se como contextos privilegiados para proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem, em que estes têm oportunidade para explicar e justificar as suas ideias e resoluções, mas exercícios ou acontecimentos do dia-a-dia podem ser pretextos para o professor desafiar os alunos a argumentar, a confrontar e a discutir as suas ideias. O importante é que o raciocínio matemático e a argumentação esteja presente em qualquer tópico matemático, e não fique limitado a situações esporádicas (Boavida et. al., 2008).

Avaliar para promover o raciocínio matemático

A capacidade do aluno raciocinar matematicamente deve ser avaliada, não só para o professor gerir o seu ensino de modo a facilitar a aprendizagem do aluno, mas também para o próprio aluno tomar consciência e regular o seu processo de aprendizagem.

As investigações e os problemas constituem contextos favoráveis à promoção do raciocínio matemático. Um instrumento geralmente associado à avaliação de actividades de aprendizagem dessa natureza é o relatório escrito. Ao fazer apelo à articulação de ideias, à explicação de procedimentos, à fundamentação e à análise crítica dos processos utilizados e dos resultados obtidos, o relatório escrito privilegia aspectos relacionados, não só com o conhecimento e compreensão de conceitos e processos, mas também com o desenvolvimento de capacidades como a comunicação e o raciocínio matemático, a reflexão, o espírito crítico e, ainda, o sentido de responsabilidade e a perseverança (Abrantes, Leal, Teixeira e Veloso, 1997; Nunes, 2004). A produção de um guião do relatório e a definição dos critérios de avaliação é fundamental. Com o intuito de potenciar a componente reguladora da avaliação, os relatórios podem ser elaborados em duas “fases”, isto é, onde uma primeira versão seja sujeita à leitura e ao comentário do professor e a versão final tenha em conta a versão inicial e, também, a evolução em termos das melhorias da primeira para a segunda versão do relatório.

Um trabalho desenvolvido numa turma do 8º ano de escolaridade, no ano lectivo 2007/2008, no âmbito do projecto AREA verificou que ao longo do ano, houve uma evolução na elaboração dos relatórios a partir de tarefas de natureza diversa. Os alunos passaram, progressivamente, a melhor descrever e explicar as estratégias utilizadas na realização de cada tarefa, e a fundamentar os resultados obtidos. A esse nível, foram também visíveis melhorias significativas da primeira para a segunda versão dos relatórios.

O relatório pode ser feito individualmente ou em grupo, na sala de aula ou fora dela, durante um período de tempo mais ou menos longo, a partir de tarefas variadas e desenvolvidas de forma diversa. Qualquer que seja a modalidade adoptada, é importante ter em conta dois aspectos centrais para que a actividade desenvolvida pelos alunos contribua para a sua aprendizagem e, em particular, para o desenvolvimento do raciocínio matemático: os critérios de avaliação e a sua apropriação pelos alunos, e a interacção oral ou escrita fornecida durante o processo. O recurso ao guião e aos critérios de avaliação parece facilitar ao aluno à tomada de consciência dos objectivos a atingir, e das exigências inerentes à elaboração do relatório, caminhando em direcção à apropriação desses critérios. Essa tomada de consciência gradual permite que os alunos ajam de forma a melhorar o seu desempenho.

No contexto de uma avaliação reguladora das aprendizagens, o importante não é a classificação atribuída aos trabalhos, mas antes a adequação dos critérios utilizados e a sua apropriação pelos alunos. Os critérios servirão também para que os alunos auto-avaliem o seu trabalho e definam estratégias de melhoria. O retorno escrito e/ou oral feito pelo professor desempenham um papel fundamental no processo de avaliação implementado através dos relatórios, já que podem contribuir para que os alunos se confrontem com aspectos positivos e com os aspectos passíveis de ser melhorados da primeira para a segunda versão e, em função de algumas orientações recebidas do professor. Assim, parece essencial que o professor não assinale os erros, mas coloque questões e comentários orientadores, fornecendo pistas relativamente àquilo que os alunos poderão fazer para melhorar a primeira versão. É importante que os alunos saibam que a avaliação final das tarefas terá em conta, não só a segunda versão do seu trabalho, como também a evolução da primeira para a segunda versão.

Além dos relatórios escritos, o professor tem à sua disposição uma variedade de formas e instrumentos de avaliação que pode utilizar em contextos diversificados, não esquecendo que a sua finalidade principal é potenciar a aprendizagem e, neste caso, específico, promover o desenvolvimento do raciocínio matemático. A discussão oral, a observação em sala de aula e a apresentação oral, são apenas alguns exemplos de instrumentos que podem ser usados com o mesmo objectivo. Os momentos de avaliação permitem ao professor aceder e compreender o raciocínio do aluno, a sua evolução, as dificuldades que sentiu e o modo como procurou ultrapassá-las, e os aspectos possíveis de serem melhorados em próximos trabalhos.

Obstáculos e limitações à avaliação formativa

Do ponto de vista dos alunos, vários estudos apontam para o facto de estes considerarem favorável este tipo de avaliação. Santos e Dias (2006), dizem que todos os alunos participantes no estudo o referem, tendo indicado algumas razões como poder melhorar o trabalho final e saber a opinião do professor antes de o trabalho ser definitivo, ver e corrigir alguns erros que fizeram, o que em sua opinião ajuda a que não voltem a cometê-los e a perceber onde têm mais dificuldades.

A avaliação formativa passa a ser vista como um processo de acompanhamento do ensino e aprendizagem, onde o principal objectivo é que o aluno vá progressivamente interpretando, cada vez melhor, o que o professor dele espera. A avaliação pode assim tornar-se um processo de diálogo entre "actores" que, partindo de pontos de vista diferentes, é capaz através da explicitação das suas divergências, de constituir entendimentos comuns e partilhados.

Mesmo assim, ainda hoje em Portugal, a avaliação formativa parece estar um pouco arredada das práticas quotidianas dos professores. A perspectiva deste tipo de avaliação, a falta de tempo para a concretização de estratégias inovadoras de ensino, o cumprimento do programa ao qual se junta as regras impostas pelo sistema educativo, o facto de se trabalhar em turmas heterogéneas e com um número elevado de alunos, torna complicado recorrer a um ensino e aprendizagem mais individualizado e a reforçar a dimensão formativa da avaliação. As dificuldades no desenvolvimento de práticas de avaliação formativa prendem-se, também, com a sistematização de informação em situações mais informais de avaliação, a sobrecarga de trabalho que a avaliação formativa acarreta porque aumenta os momentos de avaliação, e a falta de segurança quer na sua concepção e estruturação, quer na articulação com a avaliação sumativa.

Professores que usam formas alternativas de avaliação, não lhe atribuem um estatuto igual ao do teste escrito tradicional (APM, 1998; Graça, 1995; Martins, 1996), quando têm a necessidade de atribuir uma classificação final de período, isto é, em situação de avaliação sumativa. A desvalorização das primeiras em relação à segunda, o teste escrito, pode estar em parte, relacionada com a forte influência que até hoje se faz sentir do paradigma da avaliação como medida. A possibilidade de quantificar e dividir em partes perguntas de natureza mais fechada, sobretudo dirigidas à memorização ou à aplicação directa de conhecimentos, ajudam a reforçar a crença na possibilidade de um juízo objectivo e, como tal, com elevado grau de fiabilidade. Não é assim de estranhar que os alunos associem à avaliação um carácter essencialmente sumativo, sendo as notas e os testes elementos centrais no processo avaliativo (Santos e Pinto, 2003).

Avaliação interna e avaliação externa

A avaliação dos alunos do Ensino Básico foi, até 2004, da responsabilidade dos professores e das escolas, dependendo a progressão dos alunos exclusivamente desta avaliação. Os testes escritos eram, como mostra o *Relatório Matemática 2001* (APM, 1998), a principal forma de recolha de dados para a avaliação dos alunos na disciplina de Matemática, acentuando-se esta tendência à medida que se progredia nos níveis de ensino. No final do 3º Ciclo competia aos professores que conduziam o processo de ensino aprendizagem, elaborarem provas globais que, embora sujeitas a um regulamento que se aplicou a nível nacional, apresentaram características semelhantes às de um teste construído e aplicado pelo professor no decorrer do ano lectivo. Ainda que a prova global tivesse como referência o *Plano Curricular do 3º Ciclo do Ensino Básico*, deveria incidir fundamentalmente sobre competências e conhecimentos no âmbito do programa do ano curricular em que era realizada (Despacho 36-A/SEEI/96, de 5 de Setembro). Da análise do despacho citado pode considerar-se que as provas globais, produzidas e realizadas ao nível de cada escola, foram um instrumento que avaliou as competências e os conhecimentos adquiridos pelos alunos ao longo do 3º Ciclo, com especial incidência no 9º ano de escolaridade e um peso de 25% na classificação de cada disciplina. Sendo um instrumento produzido na escola, estas provas foram representativas das práticas de ensino e de aprendizagem implementadas nas escolas, assim como da tipologia de itens utilizada pelos professores nos instrumentos de avaliação por eles construídos.

As orientações curriculares para a disciplina de Matemática e o Programa do Ensino Básico de 1991, apontam para a diversificação de estratégias e de situações a propor aos alunos. A diversificação de estratégias sugerida no programa da disciplina, teve em vista o desenvolvimento de competências que permitam aos alunos enfrentar com confiança situações novas e resolver problemas de natureza diversa. A sua elaboração procurou incorporar as novas perspectivas do ensino da matemática (Ponte, 2003). Um outro movimento de renovação curricular se iniciou em 1996 com a *"reflexão participada sobre os currículos"*, continuado pelo *"projecto da gestão flexível"* e que culminou com a publicação, no inicio do ano lectivo de 2001/02 do *Currículo Nacional do Ensino Básico*. Estas novas orientações curriculares estão formuladas em termos de competências e de tipos de experiências de aprendizagem a proporcionar aos alunos. Estas competências, entendidas como saberes em acção, integram conhecimentos, capacidades e atitudes a desenvolver pelos alunos por área disciplinar e por ciclo, assumindo-se o ensino básico como um todo.

Relativamente à Matemática, considerou-se: a ênfase da matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo (p. 58).

Estas orientações perspectivam a Matemática como "uma significativa herança cultural da humanidade e um modo de pensar e aceder ao conhecimento" e assumem que "a razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural" (Currículo Nacional do Ensino Básico, p. 58). Deste modo, acentuam o carácter formativo da matemática escolar.

"O cálculo mental, o domínio de um algoritmo, a utilização de uma fórmula, a resolução de uma equação, uma construção geométrica, entre muitos outros procedimentos, são destrezas úteis que se adquirem com prática desde que não seja descurada a sua compreensão e a sua integração em experiências matemáticas significativas" (Currículo Nacional do Ensino Básico, p. 70).

A qualidade, o rigor e a pertinência da avaliação constituem elementos determinantes para se aferir o desempenho dos alunos, em articulação com a configuração do currículo. No ensino básico, a avaliação externa surge como elemento regulador do processo de ensino e aprendizagem, assegurando que a transição entre ciclos de escolaridade possa corresponder a reais saberes e competências.

No sentido de conjugar modalidades de avaliação interna com dispositivos de avaliação externa, o despacho nº 5437/2000 estabelece e regulamenta as condições de «generalização da realização de provas de aferição no final dos três ciclos que integram o ensino básico» e explicita que a avaliação aferida se destina a medir o grau de cumprimento dos objectivos essenciais, definidos a nível nacional, para cada ciclo do ensino básico, com o propósito de contribuir para a tomada de decisões no sentido de melhorar a qualidade das aprendizagens e reforçar a confiança social no sistema educativo.

A realização das provas de aferição na disciplina de Matemática, constituiu um processo complexo que percorreu diversas fases e envolveu, para além de muitos professores e escolas, vários organismos do Ministério de Educação. A concepção destas provas e dos respectivos critérios de correcção, foram da responsabilidade do Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE), tendo como referência as competências e os temas considerados essenciais que faziam parte das orientações curriculares à época. Uma informação sobre as provas de aferição, realizadas de 2002 a 2004, incluindo exemplos de tipos de itens, assim como as condições da sua realização e os procedimentos a seguir, foi enviada às escolas com antecedência. A classificação das referidas provas foi feita por um conjunto de professores, sob orientação de supervisores, tendo o GAVE assegurado a formação dos diversos intervenientes e coordenado o seu trabalho. Os resultados das provas foram enviados a todas as escolas, onde estas se realizaram, de modo a permitir a sua interpretação e uma reflexão de natureza pedagógica sobre o seu significado.

Tanto as provas externas, da responsabilidade do Ministério de Educação, como as provas internas, construídas pelos professores, são influenciadas pelo Programa. No entanto, existe uma diferença fundamental: enquanto as provas oficiais se destinam a ser respondidas por alunos não pessoalmente caracterizados, as provas realizadas a nível de escola são construídas pelos professores para os seus alunos, aos quais desejam adaptar estas provas por deles conhecerem o perfil humano e o percurso de aprendizagem.

Exames nacionais no 9º ano de escolaridade

Como instrumento de avaliação externa da responsabilidade do Ministério de Educação que se aplica no final do 3º Ciclo do Ensino Básico surgem, a partir de 2005, os exames nacionais para o 9º ano de escolaridade.

A prova de exame tem por referência o Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Gerais/Competências Específicas da Matemática e o Programa de Matemática do 3º Ciclo do Ensino Básico 2001/02, tem o peso de 30% face à nota de frequência e avaliação contínua, enquadra-se num processo que contribui para a certificação das aprendizagens e competências adquiridas pelos alunos e, paralelamente, é um instrumento de regulação das práticas educativas, no sentido de promover a melhoria das aprendizagens.

Estas provas de avaliação externa estão disponíveis em www.gave.min-edu.pt, têm formulário e tabela trigonométrica em anexo e exemplificam, de um modo geral, os tipos de itens das provas a realizar. O grau de exigência decorrente do enunciado dos itens e o grau de aprofundamento evidenciado nos critérios de classificação estão definidos pelo Programa, em adequação ao nível de ensino a que o exame diz respeito.

De acordo com as informações relativas aos exames 2010 e disponibilizadas no documento "Informações – Exame" na página do Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE), www.gave.min-edu.pt, a prova tem a duração de 90 minutos, a que acresce a tolerância de 30 minutos. Apresenta entre dezassete a vinte itens. Inclui itens de escolha múltipla e itens de construção. Alguns deles têm informação fornecida por meio de figuras, tabelas, textos ou gráficos. Os itens estão organizados segundo quatro domínios temáticos: Estatística e Probabilidades, Números e Cálculo, Álgebra e Funções e Geometria. Atendendo à relevância que é atribuída às conexões no Programa e no Currículo Nacional de Matemática, alguns itens podem envolver mais do que um domínio temático.

As respostas são registadas no enunciado da prova. A classificação a atribuir a cada uma das respostas são expressas em números inteiros e resultam da aplicação dos critérios gerais e específicos de classificação emitidos pelo Ministério de Educação.

Alguns itens poderão ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o aluno utilizar um processo de resolução correcto, não contemplado nos critérios específicos de classificação emitidos pelo GAVE, à sua resposta deverá ser atribuída a cotação total do item. Nos itens de escolha múltipla, a cotação é atribuída às respostas que apresentam de forma inequívoca a única opção correcta. Nos itens de resposta curta, a resposta pode resumir-se, por exemplo, a uma palavra, a uma expressão, a uma frase ou a um número, e a classificação é atribuída de acordo com os elementos de resposta solicitados e apresentados. Nos itens cuja resposta possa envolver a apresentação de cálculos, justificações ou construções geométricas, os critérios de classificação apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada etapa ou a cada nível de desempenho corresponde uma pontuação.

O aluno deve conhecer todos os aspectos relativos à prova de exame nacional que irá realizar e atrás descritos, bem como ser portador de todo o material de que possa necessitar: régua, compasso, esquadro, transferidor, lápis, borracha, esferográfica de tinta azul ou preta e a calculadora com que trabalha nas aulas.

A sua estrutura sintetiza-se nos quadros 1, 2 e 3.

Quadro 2.1 – Valorização dos domínios e dos conteúdos na prova nacional do 9º ano.

Domínios	Conteúdos	Cotação (em pontos)
Estatística e Probabilidades	**7º e 8º Ano:** • Estatística. **9º ano:** • Estatística e Probabilidades.	10 a 15
Números e Cálculo	**7º Ano:** • Conhecer Melhor os Números. • Os Números Racionais. **8º Ano:** • Ainda os Números. **9º Ano:** • Os Números reais.	15 a 20
Álgebra e Funções	**7º Ano:** • Proporcionalidade Directa. • Equações do 1º Grau. **8º Ano:** • Funções. • Equações do 1º grau e do 2º Grau. **9º Ano:** • Proporcionalidade Inversa. Representações Gráficas. • Sistemas de Equações. Inequações. • Equações do 2º Grau.	30 a 35
Geometria	**7º Ano:** • Semelhança de Figuras. • Espaço/Plano. Sólidos, Triângulos e Quadriláteros. **8º Ano:** • Decomposição de Figuras. Teorema de Pitágoras. • Semelhança de triângulos. • Lugares geométricos. • Translações. **9º Ano:** • Circunferência e Polígonos. Rotações. • Trigonometria do Triângulo Rectângulo. • Espaço – Outra Visão.	35 a 40

Fonte: www.gave.edu.pt. Informações – Exame 2009/2010

Quadro 2.2 – Valorização das competências na prova nacional do 9º ano

Competências	Cotação (em pontos)
Conceitos e Procedimentos.	45 a 55
Raciocínio e Resolução de Problemas.	30 a 40
Comunicação.	5 a 15

Fonte: www.gave.edu.pt. Informações – Exame 2009/2010

Quadro 2.3 – Tipologia, Número de Itens e Respectiva Cotação

Tipologia de Itens		Número de Itens	Cotação por Item (em pontos)
Itens de Selecção	• Escolha Múltipla.	4 a 7	5
Itens de Construção	• Resposta Curta.	2 a 4	3 a 5
	• Cálculo. • Composição. • Construção Geométrica. • Resolução de Problemas.	8 a 14	5 a 10

Fonte: www.gave.edu.pt. Informações – Exame 2009/2010

Resultados do exame de Matemática de 2005/ 1ª chamada

Em 2006 foi publicado pelo Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação (GAVE) no endereço electrónico www.gave.min-edu.pt em Exames Nacionais do Ensino Básico, o relatório *"Reflexão dos Docentes do 3º Ciclo sobre os Resultados do Exame de Matemática de 2005"*, onde foram considerados uma síntese das causas mais relevantes que se consideram estar na origem dos resultados dos alunos, tipos de erro mais frequentes e possíveis causas dos mesmos no âmbito da aprendizagem da matemática, e apresentadas propostas exequíveis para a implementação de estratégias de intervenção.

Os docentes da Matemática de todas as escolas do país com 3º ciclo, "debruçaram-se" sobre as produções dos alunos em cada item desta prova, para analisar o número de respostas correctas e incorrectas, os erros revelados e os motivos que se pressupõem estar na sua origem. Este relatório faz transparecer que o desempenho dos alunos submetidos à realização desta prova foi, em média, muito fraco na continuidade dos relativos às Provas de Aferição realizadas em anos anteriores.

As dificuldades específicas dos alunos, em particular as suas limitações no domínio da Língua Portuguesa na compreensão e consideração simultânea das várias condições impostas no enunciado dos itens, na resolução de situações problemáticas que admitem mais do que uma solução, no delineamento de estratégias de resolução em face de situações problemáticas mais complexas e na explicitação e registo dos raciocínios efectuados, a visualização no espaço, o cálculo e a articulação de conhecimentos, a ausência de hábitos de trabalho e falta de conhecimentos elementares de matemática, foram as explicações mais encontradas. A falta de persistência e a existência de percursos escolares anteriores deficientes motivados pela falta de interesse, iniciativa e motivação para aprender vão no sentido contrário à valorização da aprendizagem desta disciplina.

Os professores responsáveis pelo estudo das produções dos alunos apontam como estratégias para promover o sucesso na disciplina a criação de clubes de matemática, laboratórios e salas de estudo orientadas, a continuidade pedagógica e a promoção do trabalho conjunto entre docentes da disciplina que leccionam o mesmo ano de escolaridade e a elaboração de horários para apoio a alunos. Foi, igualmente, referido no relatório como proposta de acção a importância do trabalho a nível da Língua

Portuguesa, concretamente, a incorporação de tarefas que impliquem a interpretação de textos, a capacidade de comunicação e de produção de sínteses e de explicitação de raciocínios produzidos e, também, o trabalho em tarefas que envolvam a Geometria no espaço e a utilização de material de desenho.

Toda a documentação produzida foi enviada em simultâneo para o Júri Nacional de Exames (JNE) e para o Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE). Os fracos resultados obtidos a nível nacional no exame de Matemática do 9º ano - 2005/1ª chamada, deram origem a uma ampla reflexão de todos os agentes educativos portugueses e à urgente necessidade de mudanças para uma melhoria das aprendizagens dos alunos deste nível de ensino.

Em Junho de 2006, o Ministério de Educação (ME), tendo em atenção o diagnóstico efectuado pelos professores de Matemática, decorrente da reflexão sobre os resultados apresentados no relatório, definiu um *Plano de Acção para a Matemática* (PAM) a ser implementado nas escolas, primeiro para o 9º ano e depois extensível a todo o Ensino Básico, com os objectivos de apoiar projectos que visem a melhoria das aprendizagens na disciplina e proporcionar aos alunos um clima de trabalho mais aprazível.

Com o fim de desenvolver as competências inerentes aos objectivos propostos pelo PAM, o tempo dedicado à Matemática foi alargado com a utilização do crédito de horas dadas pelo Ministério de Educação, utilização da componente não lectiva e do tempo definido como oferta de escola no horário do professor, e do tempo destinado à área curricular não disciplinar Estudo Acompanhado. Segundo informação disponibilizada no site do Ministério da Educação (ME), os balanços intercalares que têm sido feitos dão conta do impacto positivo deste plano, quer ao nível das práticas lectivas, quer do trabalho entre professores.

O *Novo Programa de Matemática* para o Ensino Básico da responsabilidade do Ministério da Educação e homologado no dia 28 de Dezembro de 2007, constitui uma das medidas do Plano de Acção para a Matemática, que resulta de um processo de reestruturação do programa em vigor, para o adequar ao Currículo Nacional do Ensino Básico.

Com o objectivo de contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da disciplina, de actualizar os conteúdos programáticos e de melhorar a articulação entre os ciclos de ensino, de modo a organizar e explorar as interligações existentes, o novo programa é um documento único que engloba para cada um dos ciclos: 1º, 2º e 3º, os temas matemáticos, as orientações metodológicas e aspectos ligados à gestão curricular e à avaliação.

Com o propósito de apoiar os professores na implementação do novo programa, no ano lectivo 2009/2010 e para o 1º, 3º, 5º e 7º ano de escolaridade, foram elaborados dois possíveis percursos temáticos de aprendizagem. Cada um desses percursos é apresentado em esquema sob a forma de sequência de tópicos matemáticos, distribuídos por anos de escolaridade em cada ciclo. Em alternativa, cabe à Escola introduzir as alterações que melhor se adaptem às características dos alunos, às suas condições e ao contexto social e escolar em que está inserida.

Capítulo 3 – A Taxonomia SOLO

Princípios gerais

Pesquisas educacionais muito recentes sobre a aprendizagem da matemática, têm-se baseado em teorias cognitivas muitas das quais influenciadas pelas teorias de Piaget. Estas teorias têm fornecido um grande contributo para o desenvolvimento de métodos de pesquisa, para além de contribuir para melhor compreender a evolução do conhecimento humano em períodos mais avançados do desenvolvimento da capacidade de adquirir conhecimento (Sriraman e English, 2010).

Biggs e Collis (1982) desenvolveram uma teoria denominada *"Structure of Observing Learning Outcome"* mais conhecida por Taxonomia SOLO. Baseando-se em princípios de Piaget, identificam patamares de entendimento de conteúdos específicos, e admitem o surgimento de estruturas de conhecimento características dos estádios identificados por Piaget, mas nomeiam esses estádios como «modos de pensamento». Esses modos de pensamento surgem em idades semelhantes às que a teoria de Piaget evoca, mas são específicos para cada domínio de conhecimento e não gerais como o é para esse autor, isto é, podem apresentar-se de diferentes maneiras e em simultâneo, para áreas distintas de conhecimento. Na teoria de Biggs e Collis um modo ou estádio não emerge em substituição de outro, mas surge de forma a coexistir com todos os já existentes podendo, assim, haver coexistência também de diferentes níveis de pensamento.

É uma teoria que integra aspectos piagetianos mas que tem certas particularidades utilizadas pelos autores para gerar uma taxonomia. A taxonomia proposta por Biggs e Collis diz respeito a um sistema de categorias para identificar patamares de formalização do pensamento. Os autores defendem que esse sistema pode ser utilizado para avaliar a "qualidade" de aprendizagem ou para objectivos curriculares, uma vez que apresenta a possibilidade de identificar níveis hierárquicos de complexidade do entendimento sobre conteúdos de diferentes domínios, a partir de instrumentos desenvolvidos com esse objectivo.

Apoiada em pressupostos defendidos pela teoria de Piaget, tem a intenção de fornecer um modelo para o desenvolvimento cognitivo. Segundo Biggs e Collis, os indivíduos aprendem um novo conhecimento através de estádios ascendentes, que envolvem estruturas cognitivas cada vez mais complexas. A sua teoria foi desenvolvida a partir da concepção de que o indivíduo aprende conteúdos distintos em estádios de complexidade ascendente e que este mostra, em geral, a mesma sequência em diferentes tarefas. Os autores dão a conhecer como costumam denominar os estádios:

1. <u>Sensório – Motor</u>

   Define como um recém-nascido interage com o mundo – respostas motoras a estímulos sensoriais. Este modo não se extingue com a aquisição de outros modos, pois está relacionado ao conhecimento não expresso mas que se subentende, através do qual se estabelecem relações com outros indivíduos e o meio envolvente ao longo da vida.

2. Icónico

   Aproximadamente aos dezoito meses, surge a codificação da realidade por meio de símbolos, tendo a linguagem ainda que insuficiente uma função de pré-requisito. Como todos os modos, ele está presente em todas as fases da vida e cresce em poder e complexidade à medida que interage com os outros modos, extrapolando a fase infantil.

3. Concreto – Simbólico

   Aos seis anos a criança tem conhecimento que expressa em factos e em relações entre objectos. A linguagem escrita e a linguagem simbólica proporcionam a sua actuação sobre o ambiente. A representação do conhecimento torna-se mais abstracta, uma vez que a criança pensa em termos de símbolos para denotar objectos da vida real. Há uma lógica e uma ordem entre os próprios símbolos e a vida quotidiana. Este modo de pensamento envolve pensamento declarativo, que expressa conhecimento relativo a factos e relações entre objectos e conhecimento.

4. Formal

   Enquanto o modo concreto – simbólico lida com aspectos cognitivos do dia-a-dia, o formal envolve construções mais abstractas que podem ser usadas para gerar hipóteses sobre formas alternativas de ordenar o mundo. Aproximadamente aos catorze anos o jovem incorpora e transcende circunstâncias particulares. O pensamento apoia-se em princípios e teorias. Este sistema abstracto identifica-se com o conhecimento em uma dada disciplina e, apesar de poder surgir nessa idade, não se generaliza para todos os domínios de conhecimento e todo o pensamento. Algumas pessoas podem chegar a nunca desenvolver esse modo de pensar. Segundo Biggs e Collis (1982), a competência técnica requer um entendimento dos princípios básicos subjacentes a uma disciplina, de forma que o estudante possa gerar alternativas viáveis, quando as regras de acção se mostram inadequadas.

5. Pós – Formal

   Aos vinte anos de idade, o ser humano tem a capacidade de operar em novos campos de acção e exibir com consciência a capacidade de adquirir e estruturar o seu conhecimento. O pensamento neste modo é mais raro e remete-se ao mais alto nível de abstracção, corresponde a um alto nível de inovações, sendo que muitas práticas profissionais podem ser bem sucedidas sem que ele seja alcançado.

Os modos considerados por Biggs e Collis apresentam características semelhantes aos estádios de Piaget, no que diz respeito ao período em que surgem as estruturas cognitivas e às formas de estruturação e manipulação dos conteúdos. Os autores admitem que: (i) em termos de períodos e idades, é possível descrever alguns aspectos comuns da aprendizagem; (ii) as actividades vão crescendo em abstracção; (iii) há nítidas diferenças qualitativas e/ou descontinuidades no modo de «lidar» com um mesmo conhecimento em vários períodos da vida.

Para Biggs e Collis, ao mudar de estádio ou modo, muda-se a forma de representar o conhecimento aprendido, não a estrutura da totalidade de tarefas que se enfrentam em cada estádio. Além disso, consideram que ao surgir um novo estádio, o sujeito ainda é capaz e efectivamente funciona no modo anterior e que isso ainda pode ocorrer de forma simultânea – a teoria que propõem é multimodal. Isso quer dizer que os estádios, como definidos por Piaget, são distintos para diferentes conteúdos, ainda que para um mesmo sujeito. Dessa forma, o que caracteriza um estádio não é a complexidade estrutural do pensamento como um todo, mas o nível de abstracção da maneira como os conteúdos de uma experiência são representados.

Biggs e Collis teorizam que os estádios ou modos de pensamento, possuem níveis de complexidade que determinam como o conhecimento está estruturado. Esses níveis são ascendentes, e dizem respeito às relações estabelecidas entre diversos elementos e o conteúdo aprendido.

Segundo estes autores, no âmbito escolar podem ser identificados dois tipos de aprendizagem: a superficial e a profunda. A aprendizagem superficial diz respeito a um processo no qual o estudante reproduz em detalhe o conteúdo ensinado.

“A motivação é focalizar nos tópicos e elementos mais importantes, para tentar reproduzi-los com precisão; por isso os estudantes não vêem conexão entre os elementos ou significados e as implicações do que é aprendido.” (Biggs e Collis, 1982)

A aprendizagem profunda refere-se a um entendimento intrínseco sobre o conteúdo, e envolve processos de um nível cognitivo mais alto.

“A procura por analogias, relações com o conhecimento prévio, teorização sobre o que foi aprendido e derivações de extensões e excepções.” (Biggs e Collis, 1982)

Estes dois tipos de aprendizagem podem ser identificados nos modos ou estádios cognitivos, e podem ser entendidos como consequência das diferentes formas de trabalhar um conteúdo, seja quando a aprendizagem é realizada utilizando-se aspectos específicos de um único modo (uni modal) seja quando é realizada com atributos de vários modos em simultâneo (multimodal). Essas aprendizagens estão relacionadas com os níveis de complexidade na estruturação do entendimento de determinado conteúdo.

Para analisar as respostas de alunos a testes específicos, Biggs e Collis elaboraram uma Taxonomia que leva em conta estes dois tipos de aprendizagem. O seu objectivo foi o de identificar o tipo de pensamento exibido pelas respostas de estudantes, submetidos a tarefas de determinados conteúdos. Para os autores, de acordo com as respostas, os alunos podem exibir dentro de um modo de pensamento níveis distintos de complexidade no seu entendimento. Os níveis podem ser descritos de maneira abstracta e genérica, da seguinte forma:

- <u>Pré-estrutural</u> (PE): Forma de pensar em que as respostas são inadequadas. O aluno não responde ao que lhe é solicitado, distraindo-se ou confundindo-se com aspectos irrelevantes pertencentes a um estádio ou modo de pensamento anterior.

- <u>Uni-estrutural</u> (U): O aluno pensa de forma correcta, mas como não utiliza todos os dados, obtém pouca informação e detém-se em um único aspecto relevante para a realização da tarefa. As respostas podem, por isso, ficar sem fundamento ou inconsistentes.
- <u>Multi-estrutural</u> (M): O aluno foca-se em características mais importantes e correctas, mas elas não se integram totalmente, o que leva a que possam aparecer incoerências nas suas respostas.
- <u>Relacional</u> (R): As informações são facilmente entendidas, os dados são avaliados e as relações são estabelecidas de uma forma correcta. Há um entendimento do todo e, este, torna-se uma estrutura coerente.
- <u>Abstracto Estendido</u> (AE): Agora o aluno generaliza a estrutura coerente para um plano com características mais abstractas, representando um novo e elevado modo de pensar.

Os níveis crescem em complexidade, através de uma crescente procura pelo aumento da quantidade de memória ou poder de concentração. Estes níveis de complexidade são ordenados representando a progressão do entendimento, baseado em elementos concretos para o entendimento de elementos abstractos, através de um processo crescente de organização do número de dimensões relacionadas, de consistência entre essas relações e generalização dos princípios utilizados.

Nos níveis *uni-estrutural* (U) e *multi-estrutural* (M), o estudante interpreta a informação dada e utiliza uma estratégia conhecida para fornecer a resposta, enquanto nos níveis relacional e abstracto ele tem de pensar em muitos objectos e conhecimentos de uma só vez e avaliar quais os que estão inter-relacionados.

Os níveis *uni-estrutural* (U) e *multi-estrutural* (M) estão relacionados com a aprendizagem superficial, enquanto o *relacional* (R) e *abstracto estendido* (AE) se relacionam com a aprendizagem profunda. Estes níveis de complexidade estabelecem-se em cada modo de pensamento, formando ciclos de aprendizagem crescente, que se podem constituir em um ou mais ciclos dentro de um mesmo modo. Os ciclos de aprendizagem fazem parte do processo de entendimento. Quando um ciclo é repetido sem que seja diferente a forma de representar o conhecimento, não há mudança de estádio ou modo de pensamento, mas ocorre um aumento do grau de entendimento pois há uma maior abstracção do conhecimento. Assim, ainda que a representação do conhecimento não mude, a passagem de um ciclo a outro, indica uma progressão na forma de entender o conceito, uma vez que há incorporação de ideias mais abstractas. O número de ciclos depende da natureza do conhecimento apreendido. Se for complexo requer vários conteúdos, muitas relações, um maior grau de abstracção, e exige mais de um ciclo de aprendizagem.

Em suma, a teoria de Biggs e Collis baseia-se em princípios defendidos por Piaget para explicar a progressão do entendimento de conteúdos de domínio multidisciplinar, caracterizando os estádios como específicos para cada domínio. Nesses estádios há níveis de complexidade do entendimento, que de alguma forma dizem respeito ao grau de aprendizagem sobre os conteúdos em questão. Os autores propõem uma teoria que se baseia na concepção multimodal do desenvolvimento cognitivo, e consideram como factores determinantes na passagem de um modo de pensamento a outro: a maturidade, disponibilidade para aprender, confronto com um problema, suporte social e o nível das respostas no modo anterior. A partir desses princípios, propõem um sistema para categorizar respostas, questões e tarefas: a Taxonomia SOLO que fornece uma forma sistemática de descrever como o conhecimento de um aluno cresce em complexidade quando realiza muitas tarefas escolares.

A maior diferença relativamente a outros modelos que analisam o conhecimento, assenta no facto de Biggs e Collis defenderem que se pode avaliar o desempenho de um certo indivíduo, num determinado momento, sem fazer qualquer tipo de dedução sobre a sua estrutura cognitiva. Consideram que a análise não deve pretender inferir sobre as capacidades dos indivíduos e debruçar-se sobre a qualidade das respostas que estes produzem durante o desempenho de uma determinada tarefa (Biggs e Collis, 1982). De um ponto de vista prático, esta ideia implica que a resposta apresenta uma certa qualidade de desempenho, sendo possível atribuir-lhe uma categoria. Mas, em circunstâncias distintas o desempenho pode ser diferente, sem que tal signifique que as capacidades individuais se modificaram. Contudo, convém referir que Biggs e Collis não negam a relevância da maturação na qualidade das respostas e estabelecem um paralelismo entre os estádios de desenvolvimento – sensório motor, icónico, concreto simbólico e formal com a qualidade da aprendizagem – níveis SOLO: pré-estrutural, uni-estrutural, multi-estrutural, relacional e abstracto.

Biggs e Telfer (1981, in Biggs and Collis, 1982) consideram que os indivíduos aprendem de formas próprias que são típicas da sua idade e, por isso, as respostas estão de acordo com o seu estádio de desenvolvimento e evoluem de acordo com os níveis da estrutura SOLO. Ao responder a determinada questão, qualquer indivíduo pode exibir o seu conhecimento em diferentes níveis de complexidade para o mesmo modo de pensamento. Um aluno entra num determinado modo quando treina capacidades elementares para atingir o desempenho uni-estrutural desse modo, evoluindo até produzir uma resposta mais elaborada, multi-estrutural e chegar a um nível mais complexo, relacional. Quando chegar ao nível abstracto, significa que passa a funcionar no modo de pensamento imediatamente mais elevado de entendimento cognitivo.

A taxonomia SOLO estabelece cinco níveis, sendo que cada nível é definido à custa de três parâmetros que permitem descriminar os diferentes tipos de resposta que lhe correspondem: as capacidades, as operações envolvidas e a consistência/capacidade de concluir.

As capacidades referem-se ao conhecimento e ao tempo de atenção requeridos por cada um dos níveis SOLO. No nível pré-estrutural poderá nem ocorrer um período de atenção suficiente para recordar pelo menos um aspecto relevante e obter uma conclusão muito rápida e sem consistência. O número de factos que é possível recordar e o tempo de atenção é maior no nível abstracto, onde é necessário recordar vários conhecimentos em simultâneo, bem como estabelecer relações entre eles.

As operações envolvidas dizem respeito à forma como as respostas produzidas são adequadas às questões formuladas. Uma resposta uni-estrutural invocará apenas um aspecto relevante, a multi-estrutural apresenta vários aspectos relevantes, mas sem qualquer ligação entre eles, a relacional mostra que o indivíduo é capaz de estabelecer algumas ligações lógicas entre os aspectos referidos, mas não consegue ter uma visão global do conhecimento que está envolvido. A resposta abstracta vai para além dos dados fornecidos, introduzindo a dedução lógica e formulando um princípio geral abstracto que permita fazer várias deduções.

A consistência e a capacidade de concluir referem-se à necessidade de chegar a uma conclusão consistente, isto é, sem contradições entre a conclusão e os dados fornecidos. Quanto mais rápida for a obtenção da conclusão, menos informação será utilizada e, logo, maior será o perigo de criar contradições entre os dados e a conclusão. A resposta relacional apresenta uma conclusão capaz de relacionar todos os aspectos relevantes, evidenciando uma coerência global. Contudo, a conclusão final, óptima num contexto, poderá mostrar-se falível em outras situações, mostrando uma forte ligação aos aspectos concretos. Só a resposta abstracta mostrará uma consistência global, estabelecendo princípios aplicáveis a qualquer contexto.

O uso da Taxonomia SOLO em pesquisa educacional

Uma vez que a teoria SOLO apresenta um sistema para identificação de formas de pensamento em tarefas realizadas por alunos, ela tem sido usada de diferentes formas e nos vários domínios do conhecimento: por professores para fins de avaliação de aprendizagens, para avaliar o tipo de aprendizagem que os professores promovem em suas acções docentes, e para avaliar programas de ensino, além de servir como instrumento metodológico de pesquisas educacionais. Como sugere uma progressão dos alunos em cinco níveis de complexidade dentro de um modo específico, a sua utilização por professores leva ao desenvolvimento de programas que permitem aos alunos enriquecer e aumentar a sua aprendizagem profunda (Hattie e Brown, 2004).

Em suas pesquisas, Hattie e Brown procuram um modelo que valorize o equilíbrio entre o processo superficial e profundo da aprendizagem. Os autores argumentam que a Taxonomia é a chave que utilizam, porque ela é capaz de descrever eficazmente o processo envolvido na pergunta e resposta a questões numa escala crescente de dificuldade ou complexidade. Segundo eles, além de fornecerem parâmetros para analisar e classificar respostas, a Taxonomia pode ser utilizada para elaboração de questões em diferentes formas, que procurem identificar níveis de complexidade.

De acordo com Biggs e Collis (1982, p. 219),

“A conservação no modo sensório-motor atinge o nível abstracto quando a criança mostra pelas suas respostas que domina a conservação dos objectos. A conservação dos objectos constitui a (uni-estrutural) base para funcionar no modo intuitivo. Quando a criança conserva classes de objectos através de várias transformações, por exemplo a conservação de número e de quantidade, ela mostra uma resposta de nível multi-estrutural e, por fim, de nível relacional. Estas últimas conservações formam a base lógica do funcionamento do modo concreto, nomeadamente as classes, diferenças e equivalências (Peel, 1967), que por sua vez culminam na capacidade de conservar sistemas de relações. Estas relações transformam-se em equações matemáticas ou em soluções dedutivas complexas de problemas no modo de funcionamento formal; e num outro nível integram-se em teorias coerentes.”

As respostas que expressem estes diferentes tipos de conservação correspondem a palavras no nível uni-estrutural do modo intuitivo, progredindo para frases no nível uni-estrutural do modo concreto, para proposições no nível uni-estrutural do modo formal e proposições cada vez mais complexas posteriormente.

Analisemos um exemplo sobre as razões da escuridão da noite que se encontra em Technical Report 43, p. 18. University of Auckland. Traduzido de Hattie e Brown (2004)

Questão: Por que escurece à noite?

Uni-estrutural: Porque o Sol vai para o outro lado do mundo.

Multi-estrutural: Porque a Terra gira e o Sol rodeia a Terra.

Relacional: Escurece à noite porque o Sol rodeia um lado da Terra em 12 horas e nas outras 12 horas ele rodeia o lado oposto da Terra.

Abstracto Estendido: A Terra tem formato esférico e tem rotação em torno do seu eixo norte-sul. Como ela tem rotação, em um momento metade da esfera terrestre ficará frente ao Sol, sendo iluminada, enquanto a metade oposta ficará na sombra. Como a Terra está em contínuo movimento de rotação, um ponto na superfície terrestre passará alternadamente através da parte iluminada e da parte de sombra.

A resposta no nível uni-estrutural foca um simples conhecimento, referindo-se a uma explicação simples de causa e efeito. No nível multi-estrutural a resposta não apresenta crescimento em termos de qualidade cognitiva, mas há um maior número de ideias incorporadas na explicação do fenómeno sem apresentar relação entre essas ideias. As respostas no nível relacional identificam um outro fenómeno para explicar a relação entre o claro e o escuro, estabelecendo as relações de forma coerente. No nível abstracto estendido, as respostas são entendidas de maneira a levar em consideração a forma, o eixo vertical do planeta Terra e o seu movimento de rotação em torno do eixo, como parte de uma explicação generalizada do dia alternar com a noite.

Em certos momentos, as respostas podem ser confusas e não corresponderem a um nível preciso. Tal confusão ou eventual inconsistência, é originada pelo facto de o aluno ainda não ser capaz de utilizar mais informação do que aquela com que está habituado a trabalhar, ou ainda não dominar a complexidade da estrutura exigida pelo nível seguinte.

Capítulo 4 - SOLO como metodologia de análise de questões

O grupo de investigação e o modelo de análise de questões

SOLO é uma taxonomia que estabelece um sistema simples de categorias que não depende do conteúdo e que pode ser aplicado como instrumento para vários propósitos, neste caso para categorizar as questões das provas de aferição de Matemática do 1º e 2º ciclos e os exames nacionais de Matemática do 9º e 12º ano de escolaridade.

O grupo de investigação composto por José Matos, Fátima Rodrigues, Mário Ceia, Adelaide Filipe e Cláudia Santos reuniu regularmente para definir uma estratégia de orientação de trabalho e analisar questões das provas nacionais de Matemática que suscitaram algumas dúvidas à luz do modelo de caracterização das questões de provas de avaliação inspirado na Taxonomia SOLO e que apresento no quadro 4.1.

A diferenciação entre processos que os alunos possam escolher para responder a uma determinada questão, suscitou o debate conjunto do grupo nomeadamente ao nível dos conhecimentos envolvidos e do tipo de resposta, e levou a que fossem feitos ajustes no modelo inicial reconhecidos e autorizados pelo seu autor, Mário Ceia, que tem feito várias intervenções públicas sobre o tema sendo as mais recentes três comunicações apresentadas uma no CERME7, Rzeszów – Polónia, 2011, outra no *Encontro de Investigação em Educação Matemática* (EIEM) na Póvoa de Varzim, 2011, e ainda no *Proceedings of the 35th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME35) em Ancara – Turquia, 2011.

Tal como no modelo SOLO, este modelo considera cinco níveis sendo cada nível definido à custa de três parâmetros de análise: **Conhecimento** ou número de conhecimentos exigidos para produzir a resposta; **Operações** ou tipo de raciocínio e conclusões ou generalizações que transparecem na forma como se aplica o conhecimento; **Resposta** ou tipo de resposta solicitada.

Entenda-se por Conhecimento o conjunto de conceitos que a resposta sugere que sejam utilizados e a forma como estes são envolvidos na resposta, isto é, são fornecidos ou transparecem através do enunciado da questão, ou a informação é insuficiente e é necessário realizar uma pesquisa mental adicional. Operações, o tipo de raciocínio envolvido na resposta e como são estabelecidas as conclusões: é uma conclusão já muito experimentada em aula, uma reprodução de uma generalização realizada anteriormente ou trata-se de uma generalização inédita. A resposta é de nível de complexidade adequado ao ano de escolaridade em presença ou de nível inferior, é fechada ou não fechada, é única ou a existir a possibilidade de mais do que uma resposta estas são, ou não, do mesmo tipo.

O quadro 4.1 resume os critérios estabelecidos para definir as diferentes categorias deste modelo de análise.

Quadro 4.1 – **Modelo de caracterização das questões de provas de avaliação**

Categoria das Questões	Conhecimento	Operações	Resposta
Abstracto	▪ É necessário identificar informação relevante. ▪ Envolve a elaboração de hipóteses de trabalho. Os conhecimentos envolvidos na resolução da questão: ▪ são de grau adequado ou superior ao nível de escolaridade em causa tendo, neste caso, que ser pesquisados; ▪ estão relacionados entre si;	▪ Os raciocínios envolvidos são de carácter indutivo e/ou dedutivo. ▪ São estabelecidas generalizações inéditas	▪ As inconsistências que surgem entre as diversas soluções possíveis são resolvidas. ▪ As respostas solicitadas não são fechadas e permitem alternativas válidas.
Relacional	▪ É necessário identificar informação relevante. Os conhecimentos envolvidos na resolução da questão: ▪ são de grau adequado ao nível de escolaridade em causa; ▪ estão **relacionados** entre si.	▪ Os raciocínios envolvidos são de carácter dedutivo e/ou indutivo. ▪ São feitas generalizações semelhantes a outras já experimentadas	▪ As inconsistências surgidas, dentro do sistema proposto, são resolvidas. ▪ Podem surgir processos de resolução alternativos. ▪ As respostas solicitadas são únicas ou do mesmo tipo.
Multi-estrutural	▪ É necessário identificar informação relevante. Os conhecimentos envolvidos na resolução da questão são: ▪ de grau adequado ao nível de escolaridade em causa; ▪ utilizados de forma isolada (não são relacionados entre si).	▪ Os raciocínios envolvidos de carácter indutivos e/ou dedutivos semelhantes a outros já experimentados ▪ São feitas generalizações semelhantes a outras já experimentadas	▪ As inconsistências surgidas, dentro do sistema proposto, são resolvidas. ▪ Podem surgir processos de resolução alternativos. ▪ As respostas solicitadas são únicas ou do mesmo tipo. .
Uni-estrutural	▪ A informação fornecida é a necessária e suficiente para a resolução da questão, não sendo preciso discriminar os elementos a utilizar. ▪ O **único** conhecimento que a questão envolve é de grau adequado ao nível de escolaridade em presença	▪ Os raciocínios envolvidos são de carácter indutivo ou dedutivo, semelhantes a outros já experimentados ▪ São tiradas conclusões semelhantes a outras já conhecidas, em termos de um **único** conhecimento.	▪ Não surgem processos de resolução alternativos. ▪ As respostas solicitadas são únicas ou do mesmo tipo.
Pré-estrutural	Os conhecimentos utilizados são: ▪ de grau inferior ao nível de escolaridade em causa; ▪ do âmbito do senso comum, podendo não ter qualquer ligação ao conhecimento matemático.	Não se prevê que seja utilizado em explícito qualquer tipo de raciocínio ou exigido qualquer tipo de generalização.	Solicitam-se respostas únicas ou do mesmo tipo e dentro do sistema envolvido ou num sistema menos complexo.

Este modelo foi concebido para analisar vários tipos de questões e corresponde a uma versão preliminar que o grupo de investigação, sob a orientação de Mário Ceia, tem vindo a aperfeiçoar durante a análise de várias provas de níveis de escolaridade diferentes.
A grelha de análise é aplicável a qualquer nível de escolaridade, desde que se tenha em consideração que os conceitos e conhecimentos a que nos referimos em cada caso são os estabelecidos para o ano de escolaridade pelo programa em vigor ao momento e que as operações envolvidas são as próprias do desenvolvimento cognitivo dos alunos submetidos à realização destas provas.
Melhorias e correcções podem ser introduzidas durante a análise de novas questões, já que o grupo de investigação sente a existência de algumas debilidades que ainda não foi possível resolver nos parâmetros Operações e Resposta.

Metodologia

O modo como Biggs e Collis (1982) definem os ciclos de aprendizagem, sugere que em cada nível de escolaridade tem-se uma estrutura de questões semelhantes, variando a complexidade do conhecimento matemático que se terá de utilizar, assim como a complexidade dos raciocínios necessários à sua resolução.
Este trabalho vai incidir sobre sete exames nacionais do 9º ano: 2005/1ª chamada, 2006/1ª chamada, 2007/2ª chamada, 2008/1ª e 2ª chamada, 2009/1ª chamada e 2010/2ª chamada. Será feita uma análise e uma caracterização de cada uma das questões destes exames, e respectiva síntese para cada uma das provas com vista a estabelecer breves comparações em relação à estrutura das mesmas no que respeita ao domínio temático e à "categoria SOLO" mais contemplados.
Após leitura, análise e interpretação de cada um dos itens que compõem estas provas, tem-se em consideração se os dados fornecidos pelo enunciado são em número suficiente para partir para a sua resolução, ou se é necessário fazer uma pesquisa adicional e, se o conhecimento que emerge de todo este processo é adequado ao nível de escolaridade em apreço, é de nível mais avançado ou de nível inferior.
Tendo em conta que, em certos casos, poderei encontrar mais do que um processo para chegar à resposta solicitada, vou atender à minha experiência profissional, aos critérios específicos de classificação de cada uma das provas emitidos pelo Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE), e ao relatório "*Reflexão dos docentes do 3º ciclo sobre os resultados do Exame de Matemática de 2005*", documentos disponíveis na página electrónica www.gave-edu.pt – Exames do Ensino Básico, como forma de esgotar as hipotéticas respostas que possa construir para cada uma das questões.
O recurso aos objectivos do programa de Matemática à data em vigor, DEB – ME, 01/02, possibilita identificar os conhecimentos matemáticos que estão envolvidos na construção da resposta e se estes estão, ou não, relacionados entre si.

O grupo de investigação das questões das provas de avaliação nacionais de Matemática, atrás referido, estabeleceu que uma unidade de conhecimento matemático é a que é susceptível de ser avaliada em separado e que duas unidades de conhecimento estão relacionadas entre si se a utilização de uma depende de resultados que envolvam a outra.

Estabeleceu-se que as respostas são *únicas* se admitem uma só resposta, são *fechadas* as que envolvem apenas um processo de obter a resposta e *não fechadas* as que apresentem processos distintos de resolução.

No caso das operações identifica-se se o raciocínio é do tipo dedutivo ou indutivo, e se a resposta envolve algum tipo de generalização, distinguindo as que são inéditas por nunca terem sido experimentadas em aula, das que são idênticas a outras já realizadas e recomendadas pelo programa.

Por fim, categoriza-se a questão formulada por cada um dos itens, tendo como suporte o quadro 4.1 – *Modelo de caracterização das questões de provas de avaliação* – construído para o efeito com base na Taxonomia SOLO e que se utiliza como metodologia de análise de dados.

O quadro síntese de caracterização das questões de exame que figura no final de cada uma das provas, introduz cada um dos seus itens no domínio temático a que pertence: Estatística e Probabilidades, Números e Cálculo, Álgebra e Funções, Geometria e na categoria ou nível da Taxonomia SOLO: Pré-estrutural, Uni-estrutural, Multi-estrutural, Relacional e Abstracto. A dupla entrada fornece a panorâmica geral de cada prova, na medida em que dá a informação sobre o domínio e a «categoria SOLO» mais contemplados, facilita eventuais comparações em relação à estrutura das mesmas e é útil para tirar conclusões em termos de número de itens, do tipo e número de conhecimentos exigidos na construção de cada resposta e da sua complexidade, isto é se abrange ou não muitas ideias matemáticas que possam revelar-se difíceis.

Capítulo 5 – Análise de Exames

Prova 23 / 1ª Chamada / 2005

Esta prova foi objecto do relatório *" Reflexão dos Docentes do 3º Ciclo sobre os Resultados do Exame de Matemática de 2005"* referido no final do capítulo 2, e este resultou do estudo das respostas produzidas pelos alunos a cada um dos seus itens, com a intenção de analisar o número de respostas correctas e incorrectas, os erros revelados e o motivo que se pressupõem estar na sua origem.

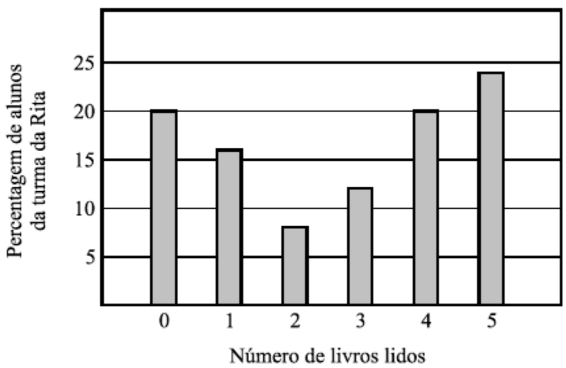
Os fracos resultados obtidos nesta prova de exame nacional, deram origem a uma ampla reflexão de todos os agentes educativos portugueses. A tomada de medidas urgentes para uma melhoria das aprendizagens dos alunos do 3º ciclo de escolaridade, levou a que em 2006 o Ministério de Educação definisse um *Plano de Acção para a Matemática* (PAM) a ser implementado nas escolas, primeiro para o 9º ano e depois extensível a todo o Ensino Básico e, também, a um processo de reestruturação do programa à data em vigor, DEB – ME, 2001/02, para melhor o adequar ao Currículo Nacional do Ensino Básico e que resultou no *"Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico"* homologado em Dezembro de 2007.

<u>Questão 1</u>

1. Na escola da Rita, fez-se um estudo sobre o gosto dos alunos pela leitura.
Um inquérito realizado incluía a questão seguinte.:

«Quantos livros leste desde o início do ano lectivo?»

As respostas obtidas na turma da Rita, relativamente a esta pergunta, estão representadas no gráfico de barras que se segue.



Escolhendo, ao acaso, um aluno da turma da Rita, qual dos seguintes acontecimentos é o mais provável?

- ☐ Ter lido menos do que um livro.
- ☐ Ter lido mais do que dois livros.
- ☐ Ter lido menos do que três livros.
- ☐ Ter lido mais do que quatro livros.

Critérios específicos de classificação:

1………..…...4
Resposta correcta (Ter lido mais do que dois livros.)..4

Resolução proposta

A resposta é ter lido mais que dois livros.

Antes de colocar «X» no quadrado correspondente à alternativa que considera correcta, há que "Ler e interpretar informação contida em tabelas ou gráficos de barras", "Interpretar uma percentagem num dado contexto" e "Fazer conjecturas a partir da interpretação de informação" são conhecimentos que o aluno detém do 2º ciclo, de acordo com o programa ME- 1991, página 23 e 38. A realização de jogos em que a possibilidade de ganhar seja, ou não, a mesma para todos os jogadores e a discussão baseada nos resultados obtidos permite, também no 2º ciclo, que os alunos se vão familiarizando com os termos: certo, possível, impossível, provável … utilizados no dia-a-dia e na linguagem das Probabilidades.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Na resolução da questão é suficiente o domínio dos conhecimentos descritos pelos objectivos referentes ao programa do 2º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Ao analisar o gráfico o aluno poderá, eventualmente, fundamentar a sua escolha através de simples cálculos mentais e utilizar um raciocínio de carácter dedutivo, semelhante a outros já experimentados.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A questão permite resposta de nível **pré-estrutural**.

Questão 2

2. Considera o conjunto $A = [-1, +\infty[$

2.1. Qual das quatro igualdades que se seguem é verdadeira?

☐ $A = [-1, 1[\cap]-\frac{3}{2}, +\infty[$	☐ $A = [-1, 1[\cup]-\frac{3}{2}, +\infty[$
☐ $A = [-1, 1[\cap]-\frac{1}{2}, +\infty[$	☐ $A = [-1, 1[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$

2.2. Considera a seguinte inequação:

$$3 + \frac{1-x}{2} \leq 4$$

Será A o conjunto solução desta inequação?

Justifica a tua resposta e apresenta todos os cálculos que efectuares.

Critérios específicos de classificação:

2.1. 5

Resposta correcta $\left([-1,1[\cup \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\right)$ 5

2.2. 7

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item como, por exemplo:

1.º Processo

Desembaraçar a inequação de denominadores 2

Isolar o termo em x num dos membros da inequação 2

Obter a desigualdade $x \geq -1$ 2

Concluir que A é o conjunto solução da inequação (**ver nota)**.............................. 1

2.º Processo

Verificar que para $x=-1$, $3+\frac{1-x}{2}=4$ 2

Referir que, à medida que x aumenta, $3+\frac{1-x}{2}$ diminui 4

Concluir que A é o conjunto solução da inequação (**ver nota**)............................... 1

Nota:

Caso o examinando se limite a referir que A é o conjunto solução da inequação, à sua resposta deverão ser atribuídos zero pontos.

Resolução proposta – 2.1

A resposta é $A=[-1,1[\cup \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

Na resolução deste item, e antes de assinalar com «X» a igualdade que considera verdadeira, o aluno tem de saber "Interpretar e representar, gráfica e simbolicamente, intervalos de números reais, assim como a intersecção e a reunião de intervalos" (DEB – ME, 2001/02, p. 56).

Para que não seja induzido em erro, deve marcar na recta numérica cada um dos limites dos dois intervalos que integram as quatro alternativas, representar geometricamente na mesma recta, cada um dos dois conjuntos de números reais, deduzir qual o intervalo que resulta da sua intersecção ou reunião, conforme o caso e compará-lo ao conjunto $A=[-1,+\infty[$, inicialmente considerado.

Resolução proposta – 2.2

A resposta é que $A=[-1,+\infty[$ é o conjunto solução da inequação.

Em presença de uma inequação o aluno opta, quase sempre, por aplicar os conhecimentos descritos pelo objectivo "Resolver inequações do 1º grau a uma incógnita" (DEB – ME, 2001/02, p. 56) de forma sequencial e através dos princípios de equivalência até obter uma desigualdade do tipo $x \geq \ldots$ ou $x \leq \ldots$, e colocar a resposta sob a forma de intervalo de números reais.

Mas, como pergunta se será $A=[-1,+\infty[$ o conjunto de solução da inequação o aluno pode ter a destreza de, através do cálculo, verificar:

Se $\quad x=-1 \quad 3+\frac{1-(-1)}{2}=3+\frac{2}{2}=3+1=4$

Se $x=2$ $\quad 3+\frac{1-2}{2}=3+\frac{-1}{2}=3-\frac{1}{2}=\frac{6}{2}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5<4$

Se $x=5$ $\quad 3+\frac{1-5}{2}=3+\frac{-4}{2}=3-2=1<4$

Isto é, à medida que x aumenta, $3+\frac{1-x}{2}$ diminui e concluir que A é realmente o conjunto solução da inequação dada. Assim o item pode ser resolvido através de dois processos distintos, em que o segundo utiliza o conhecimento descrito pelo objectivo "Determinar valores numéricos de expressões com variáveis" (DEB – ME, 2001/02, p. 23), ao substituir a variável x por um número pertencente ao conjunto A com recurso à adição e subtracção de números racionais.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Na resposta ao item 2.1 são utilizados os conhecimentos descritos no objectivo acima indicado, para verificar qual das quatro igualdades representa o conjunto $A=\left[-1,+\infty\right[$.

  O item 2.2 faz parte da Álgebra – 9º ano, e envolve os conhecimentos descritos no objectivo referido. O trabalho com intervalos de números reais está estreitamente ligado à resolução de condições, nomeadamente inequações do 1º grau a uma incógnita – conexão entre dois domínios temáticos: *Números e Álgebra*. Mas, se resolvido pelo 2º processo, o item envolve os conhecimentos descritos pelos objectivos enumerados, sendo que só um deles se refere ao programa à data em vigor.

- **Operações envolvidas**

  O raciocínio de carácter dedutivo é semelhante a outros experimentados em sala de aula, aquando da abordagem dos temas "Intervalos de números reais", "Inequações" e "Expressões com variáveis".

- **Tipo de resposta**

  A resposta solicitada é única e fechada para 2.1, única e não fechada no caso do item 2.2.

- **Categorização**

  Embora a resolução do item 2.1 exija conhecimentos definidos em apenas um objectivo específico, considero a reunião e intersecção de intervalos como duas operações distintas e mais complexas do que a representação simples de um só intervalo de números reais. Nestas condições parece haver razões para categorizar este item como uma questão **multi-estrutural**.

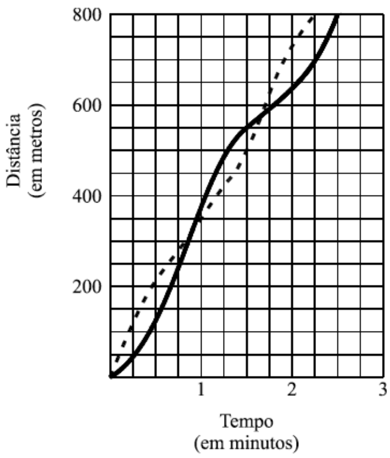
  Em acordo com o que é exposto anteriormente, se a resposta ao item 2.2 seguir o 1º processo é **multi-estrutural** (2.2a) mas, se seguir o 2º processo é **uni-estrutural** (2.2b).

Questão 3

3. Dois amigos, o Carlos e o João, participaram numa corrida de 800 metros.

Logo após o sinal de partida, o João estava à frente do Carlos, mas, ao fim de algum tempo, o Carlos conseguiu ultrapassá-lo. Na parte final da corrida, o João fez um *sprint*, ultrapassou o Carlos e cortou a meta em primeiro lugar.

Os gráficos que se seguem representam a relação entre o tempo e a distância percorrida, ao longo desta corrida, por cada um deles.



3.1. Quantos metros percorreu **o João** durante o primeiro minuto e meio da corrida?
Resposta ____

3.2. Quanto tempo decorreu entre a chegada de cada um dos dois amigos à meta?
Resposta ____

Critérios específicos de classificação:

3.1. 4
A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:
Responde correctamente 500 ou 500 metros) 4
Responde 550 ou 550 metros.................................. 2
Dá outra resposta 0

3.2. 4
A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:
Responde correctamente (15 ou 15 segundos) 4
Responde 0,25 minutos ou $\frac{1}{4}$ de minuto 3
Evidencia ler correctamente os dois tempos de chegada à meta (por exemplo: «Um chegou aos 2,5 minutos e o outro aos 2,25 minutos.» ou ...), mas não responde, ou responde incorrectamente 2
Dá outra resposta 0

Resolução proposta – 3.1

A resposta correcta é 500 metros.

Na resolução deste item o aluno deve ter em atenção a informação relevante que faz parte do enunciado, para identificar no gráfico a linha que traduz a corrida do João, localizar no eixo que indica o tempo um minuto e meio, seguir para cima na vertical, até encontrar a linha relativa ao João (**- - - -**) e no eixo que indica a distância ler a ordenada que corresponde à abcissa 1,5.

Resolução proposta – 3.2

A resposta é 15 segundos.

O aluno deve reconhecer a parte final da corrida como a chegada à meta, estabelecer uma relação entre as abcissas dos pontos de chegada dos dois amigos e traduzir o tempo de intervalo entre as duas chegadas – um quarto de minuto – em segundos.

O programa de Matemática do ensino básico (DEB – ME, 2001/02, p. 54) aponta como objectivo que o aluno deva "Interpretar e explorar gráficos que lhe sejam fornecidos" e, dada a importância da linguagem gráfica como instrumento poderoso de análise e comunicação, as sugestões metodológicas aconselham a análise e interpretação de gráficos que traduzam situações da vida real. Descrever uma corrida ou um passeio traduzido por um gráfico distância à origem/tempo, são representações que surgem ao longo do 3º ciclo e que exigem capacidades matemáticas que envolvem conhecimentos e/ou argumentos simples que o aluno pode realizar com interesse.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Nos dois itens é exigido o domínio de mais do que um conhecimento distinto para ler, interpretar e analisar o gráfico de duas linhas.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios dedutivos semelhantes a outros já experimentados neste ciclo do ensino básico.

- **Tipo de resposta – 3.1 e 3.2**

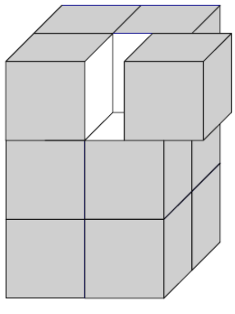
  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  De acordo com a argumentação exposta categorizo a resposta a cada um dos dois itens como **multi-estrutural**.

Questão 4

4. Pintaram-se as seis faces de um prisma quadrangular regular antes de o cortar em **cubos iguais**, tal como se pode observar na figura.



Se escolheres, ao acaso, um desses cubos, qual é a probabilidade de o cubo escolhido ter **só** duas faces pintadas?

Apresenta o resultado na forma de uma fracção irredutível.

Critérios específicos de classificação:

4. 6

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:

Responde correctamente $\frac{1}{3}$ 6

Indica correctamente a probabilidade pedida (**por exemplo**: $\frac{4}{12}$ **ou** 0,(3) **ou** ...), mas não apresenta, ou apresenta incorrectamente, o resultado na forma de fracção irredutível 5

Indica a probabilidade pedida na forma de percentagem ou dízima, sem explicitar o carácter infinito e periódico da dízima (**por exemplo**: 33% **ou** 0,3 **ou** …)

Ou

Identifica correctamente o número de casos possíveis (12), mas incorrectamente o número de casos favoráveis. De acordo com o erro cometido, indica correctamente a probabilidade, cujo valor terá de estar compreendido entre 0 e 1 4

Identifica correctamente o número de casos possíveis (12) e o número de casos favoráveis (4), mas não indica a probabilidade pedida, ou indica-a incorrectamente (**por exemplo**: 4 em 12 **ou** ...) 2

Dá outra resposta 0

Resolução proposta

A probabilidade de um cubo escolhido ao acaso ter só duas faces pintadas é $\frac{4}{12}$, isto é $\frac{1}{3}$.

Chegar à resposta correcta implica uma visualização a três dimensões e a identificação do número de cubos que têm só duas faces pintadas (4) em doze, que é o número total de cubos em que o sólido foi cortado, de acordo com a figura. Ao aluno exige-se um único e novo conhecimento definido no objectivo específico “Calcular, em casos simples, a probabilidade de um acontecimento como quociente entre número de casos favoráveis e número de casos possíveis” (DEB – ME, 2001/02, p.51). “Escrever fracções equivalentes a uma fracção dada” é um conhecimento que faz parte do programa do 2º ciclo (DHGEBS – ME, 1991, p. 22).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A resolução desta questão exige o domínio de um só conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio de carácter dedutivo sobre os sólidos geométricos representados na figura e semelhantes a outros já experimentados.

- **Tipo de resposta**

  A resposta solicitada é única e fechada.

- **Categorização**

  Esta questão permite uma resposta de nível **uni-estrutural**.

Questão 5

5. Uma tenda de circo (figura 1) está montada sobre uma armação.

A figura 2 representa uma parte dessa armação.

Figura 1

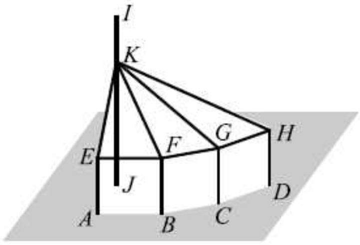


Figura 2

Os pontos A, B, C e D são alguns dos vértices de um polígono regular, contido no plano do chão da tenda.
Os ferros representados pelos segmentos de recta $[EA]$, $[FB]$, $[GC]$ e $[HD]$ têm todos o mesmo comprimento e estão colocados perpendicularmente ao chão.

O mastro representado pelo segmento de recta $[IJ]$ também está colocado perpendicularmente ao chão. O ponto K pertence a esse segmento de recta.

5.1. Utilizando as letras da figura 2, indica:

5.1.1. Uma recta paralela ao plano ABF.
Resposta ______________________________

5.1.2. Um plano **não perpendicular** ao chão.
Resposta ______________________________

5.2. Um grupo de 20 crianças foi ao circo.

Na tabela ao lado, podes observar o preço dos bilhetes, em euros.
Na compra dos 20 bilhetes, gastaram 235 €.
Quantas crianças daquele grupo tinham mais de 10 anos de idade?
Apresenta todos os cálculos que efectuares.

IDADE	PREÇO (por bilhete)
Até 10 anos (inclusive)	10 €
Mais de 10 anos	15 €

Critérios específicos de classificação:

5.1.1...4
A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:
Responde correctamente (CG **ou** IJ **ou** …)..4
Dá outra resposta..0

5.1.2....4
A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:
Responde correctamente (CHK **ou** EGK **ou** FHI **ou** …)..............................4
Dá outra resposta..0

5.2. 8

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item como, por exemplo:
1.º Processo
Equacionar o problema...4
Resolver a equação ou o sistema (**ver nota**)...3
Responder ao problema (7 crianças)...1

Nota:
O examinando pode não resolver completamente o sistema. Desde que determine correctamente o valor da variável correspondente ao número de crianças com idade superior ou igual a 10 anos, deverão ser atribuídos 3 pontos a esta etapa.

2.º Processo
A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:
Elabora uma estratégia completa e adequada à resolução do problema e responde correctamente (7 crianças)...8
Elabora uma estratégia completa e adequada à resolução do problema, mas não responde, ou responde incorrectamente..7
Elabora uma estratégia adequada à resolução do problema, mas não a completa (**por exemplo**:
$10 \times 10 = 100$ e $10 \times 15 = 150$ e $100 + 150 = 250$;
$15 \times 10 = 150$ e $5 \times 15 = 75$ e $150 + 75 = 225$. ou ...),
ou completa-a incorrectamente...4

Inicia uma estratégia adequada à resolução do problema (**por exemplo**:

$10 \times 10 = 100$ e $10 \times 15 = 150$ e $100 + 150 = 250$

ou ...) 2

Responde correctamente (7 crianças), mas não apresenta a estratégia seguida, ou esta é incompreensível 1

Dá outra resposta 0

Resolução proposta – 5.1.1

A recta IJ, por exemplo.

O plano ABF e a recta IJ são perpendiculares ao plano do chão. Logo, a recta IJ é paralela ao plano ABF

Resolução proposta – 5.1.2

O plano GHK, por exemplo.

O plano GHK é oblíquo, isto é, não perpendicular ao plano do chão que está na horizontal.

O item 5.1 requer a leitura e a compreensão da informação dada no enunciado. Exige a visualização e o raciocínio espacial na análise de uma situação real, assim como os conhecimentos descritos pelos objectivos "Identificar em modelos concretos, rectas e planos em várias posições relativas" (5.1.1) e "Resolver problemas no espaço, envolvendo os critérios dados", neste caso não perpendicularidade de planos (5.1.2) (DEB – ME, 2001/02, p. 61), para elaborar uma resposta ao item subdividido em dois.

Resolução proposta – 5.2

O número de crianças do grupo com mais de 10 anos de idade é 7.

Para resolver o problema que pode ser visto como real, o aluno deve considerar, em simultâneo, todas as condições impostas pelo enunciado e ter em conta que a solução terá de obedecer a três condições: o preço dos bilhetes para cada um dos grupos de crianças, o número de crianças envolvidas que é deduzido através do número de bilhetes comprados, e o custo total dispendido na compra dos mesmos.

Os conhecimentos descritos pelos objectivos "Interpretar o enunciado de um problema", "Traduzir um problema por meio de uma equação" e "Resolver equações do 1º grau com uma incógnita, sem denominadores, utilizando as regras" acompanham o aluno desde o 7º ano (DEB – ME, 2001/02, p. 27) e são retomados no 9º ano aquando da resolução de problemas através de um sistema de duas equações do 1º grau a duas incógnitas, pelo método de substituição (p. 52).

Na posse de diferentes métodos algébricos de resolução de problemas, o aluno deverá ser capaz de escolher um deles: equação do 1º grau a uma incógnita, sistema de duas equações do 1º grau a duas incógnitas ou por elaboração de uma estratégia adequada ao contexto do problema. Processos diferentes que, aplicados de forma correcta, conduzem a uma mesma solução.

1º processo

seja x o número de crianças com mais de 10 anos e (20 - x) o número de crianças com menos de 10 anos.

$15x+10(20-x)=235 \Leftrightarrow 15x+200-10x=235 \Leftrightarrow 5x=235-200 \Leftrightarrow x=35/5 \Leftrightarrow x=7$

2º processo

seja x o número de crianças com mais de 10 anos e y o número de crianças com menos de 10 anos.

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 15x+10y=235 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20-y \\ 15(20-y)+10y=235 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \begin{cases} --- \\ -5y=-65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20-13=7 \\ y=13 \end{cases}$$

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Em cada uma das duas alíneas do item 5.1 é exigido o domínio de um só conhecimento. Em 5.2 o aluno tem de interpretar e traduzir o enunciado de um problema da linguagem corrente para a linguagem matemática obedecendo, obrigatoriamente, a todas as condições descritas no enunciado. Neste caso o aluno deve dominar mais do que um conhecimento e saber usá-los para que possa chegar à resposta correcta.

- **Operações envolvidas**

  Os raciocínios envolvidos são de carácter dedutivo e semelhantes a outros já experimentados, ou de carácter dedutivo e indutivo se o aluno utilizar todos os dados do problema 5.2 com lógica e definir uma estratégia adequada à sua resolução.

- **Tipo de resposta**

  No item 5.1 as respostas às duas questões não são únicas mas são do mesmo tipo, isto é, qualquer recta da figura 2 que seja paralela a IJ é paralela ao plano ABF e existem outros planos na figura 2 não perpendiculares ao chão.
  O item 5.2 e de resposta única e não fechada.

- **Categorização**

  O item 5.1 envolve duas questões, sendo que cada uma permite uma resposta **uni-estrutural** e o item 5.2 requer resposta **multi-estrutural**.

Questão 6

6. Escreve um número **irracional** compreendido entre 4 e 5.

Resposta ___________________________________

Critérios específicos de classificação:

6...5

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:

Responde correctamente (**por exemplo**: $\pi + 1$ ou $\sqrt{17}$ ou $\sqrt[3]{65}$ ou $3 + \sqrt{2}$ ou …)

Ou

Escreve um número compreendido entre 4 e 5 na forma de dízima, em cuja parte decimal se subentende uma regra de formação que conduz a uma dízima infinita não periódica (**por exemplo**: 4,010110111 … **ou** 4,505005000 … **ou** …)..5

Escreve um número compreendido entre 4 e 5 na forma de dízima, onde é evidente a intenção de designar uma dízima infinita não periódica (**por exemplo**: 4,127854 … ou …)...3

Dá outra resposta...0

Resolução proposta

Por exemplo, $\sqrt{20}$.

Para chegar à resposta correcta, é necessário distinguir números racionais de números irracionais e pensar num número irracional, entre muitos, que possa estar entre quatro e cinco.

Embora o aluno, desde o 7º ano de escolaridade, tenha vindo a ser posto perante problemas que envolvem números irracionais, só no 9º ano vai dar consistência à existência desses números ao dominar o conhecimento descrito pelo objectivo "Relacionar números reais com o tipo de dízimas que os representam" e distinguir números irracionais de números racionais, relacionando-os com dízimas infinitas não periódicas, podendo enquadrar e comparar quaisquer números reais (DEB – ME, 2001/02, pp. 55 e 56).

Pode recorrer-se a mais do que um modo de resolução: por enquadramento, por construção de uma dízima infinita não periódica ou por um processo aditivo.

$$4^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4 \quad \text{e} \quad 5^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$$

$$4 < 4{,}472135955... < 5$$

Ou, o número 4, 101001000100001000001… também é uma dízima infinita não periódica.

Ou, $\sqrt{2} = 1{,}414213562....$… é um número irracional que o aluno conhece bem.

$3 + \sqrt{2} = 4{,}414213562....$. tem igual parte decimal. É um irracional que, também, está entre 4 e 5.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve o domínio de pelo menos um conhecimento do nível de escolaridade em apreço.

- **Operações envolvidas**

  O raciocínio desenvolvido na resolução da questão é de carácter dedutivo semelhante a outros já feitos por enquadramento de um número real, com números irracionais encontrados com o auxílio da calculadora ou por um raciocínio mais elaborado no caso do 3º processo em que o aluno se vale do facto de conhecer que $\sqrt{2}$ corresponde a uma dízima infinita não periódica.

- **Tipo de resposta**

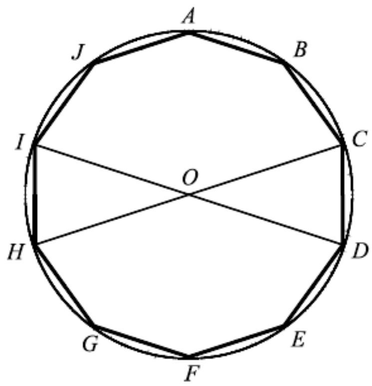
  A resposta é não única, do mesmo tipo e não fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **multi-estrutural** (6.a) ou até relacional (6.b) se recorrer a um processo aditivo que faça uso de $\sqrt{2}$.

Questão 7

7. Na figura está representado um **decágono regular** $[ABCDEFGHIJ]$, inscrito numa circunferência de centro O.



Os segmentos de recta $[ID]$ e $[HC]$ são diâmetros desta circunferência.

7.1. Após uma rotação de centro em O e de amplitude 144º (sentido contrário ao dos ponteiros do relógio), o ponto A desloca-se para uma posição que, antes da rotação, era ocupada por outro ponto. De que ponto se trata?

Resposta ______________________________________

7.2. Ao observar a figura, a Rita afirmou:

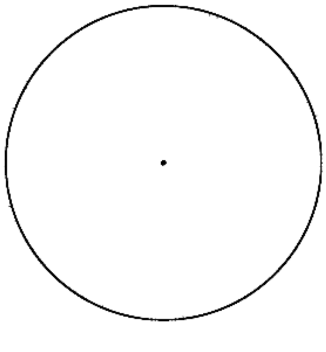
«*A amplitude do ângulo* CDI *é igual à amplitude do ângulo* CHI»

Uma vez que a Rita não tinha transferidor, como é que ela poderá ter chegado a esta conclusão?
Justifica a tua resposta.

7.3. Com o auxílio de material de desenho, inscreve, na circunferência abaixo desenhada, **um triângulo equilátero**.

O ponto que está marcado no interior da circunferência é o seu centro.

Não apagues as linhas auxiliares que traçares para construíres o triângulo.



Critérios específicos de classificação:

7.1. 4

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:
Responde correctamente (G) 4
Responde E.. 2
Dá outra resposta 0

7.2. 6

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item como, por exemplo:

1.º Processo
Justificar que a amplitude do ângulo CDI é igual à amplitude do ângulo, CHI porque os dois ângulos estão inscritos no mesmo arco de circunferência 6

2.º Processo
Determinar a amplitude do arco CI (144º) 2
Determinar a amplitude de cada um dos ângulos, CDI e CHI (72º) 4

3.º Processo
Determinar a amplitude dos ângulos COD e IOH (36º) 2
Determinar a amplitude dos ângulos CDI e CHI $\left(\frac{180º-36º}{2}\right)$ 4

4.º Processo
Justificar que os triângulos $[OCD]$ e $[OIH]$ são geometricamente iguais 4
Concluir a igualdade da amplitude dos ângulos CDI e CHI....................... 2

7.3. 7

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:
Evidencia utilizar um processo correcto para construir um triângulo equilátero inscrito na circunferência, e a construção é feita com rigor **(ver nota)** 7
Evidencia utilizar um processo correcto para construir um triângulo equilátero inscrito na circunferência, mas a construção é feita com pouco rigor **(ver nota)** 5
Inicia um processo correcto para construir um triângulo equilátero inscrito na circunferência, mas não o completa (por exemplo: marca um arco de circunferência de amplitude 120º e/ou o ângulo ao centro correspondente **ou** ...) 3
Constrói um triângulo, inscrito na circunferência, cujos lados têm comprimento compreendido entre10,2 e 10,6 cm, mas não apresenta as linhas auxiliares que evidenciem o processo utilizado... 2
Dá outra resposta 0

Nota:
Considera-se que a construção é feita com rigor se os seus lados tiverem o comprimento compreendido entre 10,2 e 10,6 cm.

Resolução proposta – 7.1

Trata-se do ponto G.

O item apela ao conhecimento elementar de amplitude total de uma circunferência, na qual está inscrito um decágono regular e que divide a circunferência em dez ângulos ao centro e dez arcos iguais de amplitude 36, e ao conhecimento descrito pelo objectivo “Identificar rotações de polígonos regulares, em torno do seu centro” (DEB – ME, 2001/02 p. 57).

Resolução proposta – 7.2

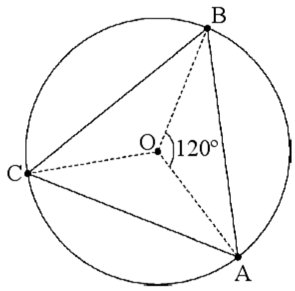
$C\hat{D}I = 72º$ e $C\hat{H}I = 72º$

Sem transferidor o aluno poderá chegar à resposta correcta através da definição de ângulo inscrito e do domínio do conhecimento descrito no objectivo “Relacionar a amplitude dos ângulos inscritos com as amplitudes dos arcos correspondentes” (DEB – ME, 2001/02, p. 57) – «ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência têm igual amplitude».

Os ângulos CDI e CHI estão inscritos no arco de circunferência CI cuja amplitude é 36×4 = 144º, logo a amplitude de cada um dos ângulos é metade do arco CI, isto é 72.
Em acordo com os critérios específicos de classificação, chega-se à conclusão que os ângulos CDI e CHI têm a mesma amplitude por processos distintos, três deles por aplicação dos conhecimentos descritos anteriormente e um quarto processo por justificação de que os ângulos IOH e COH são iguais porque são verticalmente opostos e $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OI} = \overline{OH}$ são raios da circunferência, o que prova que os triângulos [OCD] e [OIH] são geometricamente iguais – resolução mais elaborada.

Resolução proposta – 7.3

"Justificar relações entre elementos de uma figura geométrica" e "Construir figuras, utilizando instrumentos de medição e desenho" são objectivos do programa à data em vigor – 9º ano – pág. 57.



O item exige condições do enunciado para o traçado de um triângulo equilátero, inscrito na circunferência dada, requer experiência e rigor em realizar tarefas que envolvam a utilização de material de desenho: régua, transferidor, compasso, … Envolve a elaboração de hipóteses de trabalho e, eventualmente, o aparecimento de algumas inconsistências que o aluno deve resolver, com recurso a conhecimentos adquiridos.
Os vértices do triângulo equilátero a inscrever na circunferência apresentada na prova de exame, são pontos da circunferência e os seus três lados iguais são cordas da circunferência às quais correspondem arcos iguais e, por consequência, ângulos ao centro com igual amplitude. Assim, o aluno deve traçar um raio da circunferência e a partir dele marcar dois ângulos de 120º, ou utilizar o compasso com abertura $\overline{AB}$ e com a ponta fixa no ponto B, marcar o ponto C, identificando os três pontos que correspondem aos vértices do triângulo.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Na resolução de cada um dos itens estão envolvidos mais do que um conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Os raciocínios utilizados nos itens 7.1 e 7.2 são de carácter dedutivo e são tiradas conclusões similares a outras experimentadas em sala de aula. O item 7.3 requer um raciocínio mais organizado, dedutivo e/ou indutivo, para desenvolver todas as etapas de forma ordenada no processo de construção do triângulo equilátero inscrito na circunferência.

- **Tipo de resposta**

  Os itens 7.1 e 7.3 são de resposta única e fechada e o item 7.2 é de resposta única mas não fechada.

- **Categorização**

  Cada um dos itens permite uma resposta **multi-estrutural**.

Questão 8

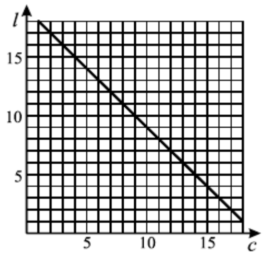
8. Existem vários rectângulos, de dimensões diferentes, com 18 cm^2 de área.

8.1. Completa a tabela que se segue, indicando, em cm, o comprimento e a largura de três rectângulos **diferentes (A**, B e C), com 18 cm^2 de área.

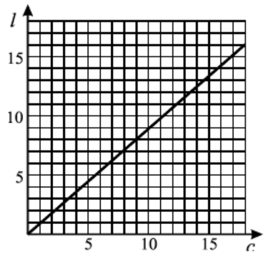
	Rectângulo A	**Rectângulo B**	**Rectângulo C**
Comprimento (cm)	4		
Largura (cm)		0,5	

8.2. Qual dos gráficos seguintes pode representar a relação entre a largura (l) e o comprimento (c) de rectângulos com 18 cm^2 de área?

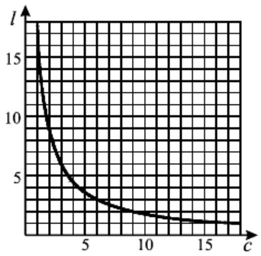
☐ Gráfico A



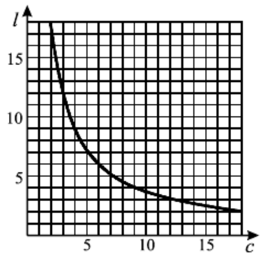
☐ Gráfico B



☐ Gráfico C



☐ Gráfico D



Critérios específicos de classificação:

8.1. 6
Indicar a largura do rectângulo A (4,5)..2
Indicar o comprimento do rectângulo B (36)..................................2
Indicar dimensões correctas para o rectângulo C (ver **nota**)..........2

Nota:
Caso o examinando indique para dimensões do rectângulo C, as mesmas dimensões do Rectângulo A ou do rectângulo B, esta etapa deverá ser cotada com zero pontos.

8.2...5
Resposta correcta (Gráfico C)..5

Resolução proposta – 8.1

Largura do rectângulo A – 4,5.

Comprimento do rectângulo B – 36

Comprimento e largura do rectângulo C – 9 e 2, por exemplo.

O item pertence ao domínio da Geometria – 2º ciclo (DHGEBS – ME, 1991, p. 18) onde se apresenta como objectivo específico do programa “Calcular a área de figuras planas simples, decomponíveis em rectângulos e em quadrados”.

Para completar a tabela, e de acordo com a fórmula da área de um rectângulo (Comprimento$\times$largura), o aluno tem de procurar o número que multiplicado por cada um dos números que constam da tabela dá 18. No caso do rectângulo C, tem de sugerir dois números cujo produto seja 18.

Resolução proposta – 8.2

Gráfico C é a resposta correcta.

Nesta questão, o item 8.1 tem claramente a intenção de ser ponto de partida para a situação que se apresenta graficamente em 8.2 estabelecendo-se, assim, a conexão entre a Geometria e a Álgebra.

Na resolução deste item é necessário dominar os conhecimentos descritos pelos objectivos “Reconhecer situações de proporcionalidade inversa, indicando a constante de proporcionalidade”, “Representar graficamente funções do tipo $y = k / x$, ($k > 0$ e $x > 0$) e “Interpretar e explorar gráficos que sejam fornecidos”. Se o comprimento do rectângulo aumenta, a largura diminui e vice-versa, para que a área seja 18 cm^2.

Antes de colocar um «X» no quadrado correspondente à alternativa correcta, o aluno tem de identificar o gráfico em que para qualquer ponto (c, l), o produto entre as duas coordenadas é 18 – constante de proporcionalidade inversa.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 8.1 envolve o domínio de conhecimentos de Geometria, que são de grau inferior ao nível de escolaridade em presença.

  O item 8.2 faz parte do domínio Álgebra e Funções e envolve mais do que um conhecimento que estão relacionados.

- **Operações envolvidas**

  Os raciocínios envolvidos na procura das respostas correctas são de carácter dedutivo, similares aos experimentados em sala de aula, aquando das abordagens dos temas.

- **Tipo de resposta**

  No item 8.1 e para o comprimento e largura do rectângulo C a resposta não é única. A resposta é única e fechada em 8.2.

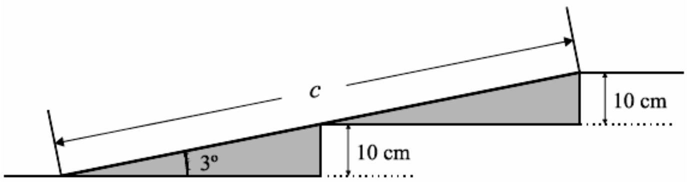
- **Categorização**

  Pelo exposto o item 8.1 apresenta uma resposta **pré-estrutural** e o item 8.2 resposta **relacional**.

Questão 9

9. O acesso a uma das entradas da escola da Rita é feito por uma escada de dois degraus iguais, cada um deles com 10 cm de altura.
Com o objectivo de facilitar a entrada na escola a pessoas com mobilidade condicionada, foi construída uma rampa.

Para respeitar a legislação em vigor, esta rampa foi construída de modo a fazer com o solo um ângulo de 3°, como se pode ver no esquema que se segue (o esquema não está à escala).



Determina, em metros, o comprimento, *c*, da rampa.
Indica o resultado arredondado às décimas e apresenta todos os cálculos que efectuares.
Sempre que, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva quatro casas decimais.

Critérios específicos de classificação:

9. 8

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item como, por exemplo:

1.º Processo
Estabelecer a igualdade sen $3^0 = \frac{20}{x}$ (ou equivalente) 4
Determinar o valor de x **(ver nota 1)** 2
Indicar o comprimento da rampa, em metros (3,8) **(ver nota 2)** 2

2.º Processo
Estabelecer a igualdade sen $3^0 = \frac{10}{x}$ (ou equivalente) 4
Determinar o valor de x **(ver nota 1)** 1
Determinar o comprimento da rampa, em centímetros **(ver nota 1)** 1
Indicar o comprimento da rampa, em metros (3,8) **(ver nota 2)** 2

3.º Processo
Referir que 20 cm = 0,2 m 1
Estabelecer a igualdade tg $3^0 = \frac{0{,}2}{x}$ (ou equivalente) 2
Determinar o valor de x **(ver nota 1)** 1
Estabelecer a igualdade $c^2 = x^2 + 0{,}2^2$ (ou equivalente) 2
Determinar o comprimento da rampa, em metros (3,8) **(ver nota 2)** 2

Notas:
1. Se o examinando, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos e desrespeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservação de 4 casas decimais, a sua resposta deverá ser penalizada em 1 ponto.
2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às décimas, ou se não o arredondar correctamente, a sua resposta deverá ser penalizada em 1 ponto.

Resolução proposta

$$sen.3^{o} = \frac{10}{x} \Leftrightarrow 0{,}0523 = \frac{10}{x} \Leftrightarrow x = \frac{10}{0{,}0523} \Leftrightarrow x = 191{,}2046$$

Comprimento da rampa = $2x = 2 \times 191{,}2046 = 382{,}4092 \text{ cm} \approx 3{,}8 \text{ m}$

O comprimento da rampa é, aproximadamente, 3,8 metros.

Na resolução da questão o aluno deve interpretar e compreender o enunciado do problema e para recorrer a uma estratégia de resolução do mesmo, tem de aplicar conhecimentos de Geometria em situações concretas, relacionar ângulos com distâncias e dominar o conhecimento descrito pelo objectivo "Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo" a partir dos triângulos rectângulos semelhantes que ressaltam à vista na figura que mostra uma rampa de acesso a uma porta (DEB – ME, 2001/02, p.60). Para além disso, vai ter que respeitar todos os detalhes exigidos na resposta, tais como saber reduzir de centímetros a metros, que é um conhecimento adquirido há longo tempo, e dominar o conhecimento descrito no objectivo "Indicar valores aproximados de um dado número real, controlando o erro" para arredondar às décimas (DEB – ME, 2001/02, p. 55).
O 1º e 2º processo apresentados pelos critérios de classificação são idênticos. O primeiro considera o comprimento *c* da rampa a hipotenusa do triângulo rectângulo que tem de altura 20 cm. No segundo processo, se os degraus são iguais, os dois triângulos são, também, iguais e *c* mede o dobro da hipotenusa de um deles. O 3º processo recorre à trigonometria do triângulo rectângulo e ao teorema de Pitágoras para determinar o comprimento da rampa.
O aluno está em condições de aplicar qualquer um dos processos à resolução do problema.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão exige o recurso a pelo menos dois conhecimentos distintos, descritos nos objectivos acima referidos.

- **Operações envolvidas**

  Os raciocínios envolvidos na resolução desta questão são de carácter dedutivo, semelhantes a outros que o aluno fez na resolução de situações idênticas e trabalhadas em sala de aula.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e não fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é de nível **multi-estrutural**.

Questão 10

10. Quatro amigos encontraram-se para resolver um problema de Matemática que envolvia o cálculo do perímetro de um círculo com 10 cm de diâmetro.

Na tabela que se segue, está indicado o valor que cada um obteve para o perímetro do círculo.

Rita	Carlos	João	Sofia
31,4 cm	31,41 cm	31,42 cm	31,43 cm

Qual dos quatro amigos obteve uma melhor aproximação do perímetro daquele círculo?

☐ Rita ☐ Carlos ☐ João ☐ Sofia

Critérios específicos de classificação:

10. 5

Resposta correcta (João) 5

Resolução proposta

$P = \pi \times d = 3{,}14150 \times 10 = 31{,}4159 \approx 31{,}42$

A questão requer indicar a melhor aproximação do perímetro de um círculo com 10 cm de diâmetro. O formulário anexo à prova de exame dá a fórmula do perímetro e o valor de π (pi). Só resta saber fazer aproximações!

"Descobrir experimentalmente e usando a calculadora um valor aproximado de π e inferir uma fórmula do perímetro do círculo" e "Estimar, em casos simples, o perímetro de círculos" são objectivos que fazem parte do programa do 2º ciclo (DHGEBS – ME, 1991, p. 33), mas "Indicar valores aproximados de um dado número real, controlando o erro" já é um conhecimento do 3º ciclo.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve conhecimentos de grau inferior ao nível de escolaridade em presença e um conhecimento ao nível de escolaridade em apreço.

- **Operações envolvidas**

  Antes de colocar «X» no quadrado correspondente à alternativa que considera correcta, o raciocínio que o aluno tem de fazer é muito simples, já que o perímetro do círculo é um assunto muito praticado.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta é de nível **uni-estrutural**.

<u>Questão 11</u>

11. Arrumaram-se três esferas iguais dentro de uma caixa cilíndrica (figura 1). Como se pode observar no esquema (figura 2):

- a altura da caixa é igual ao triplo do diâmetro de uma esfera;
- o raio da base do cilindro é igual ao raio de uma esfera.

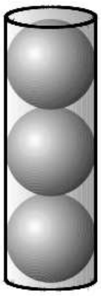


Figura 1

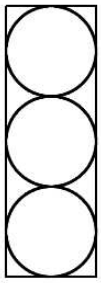


Figura 2

Mostra que:

O volume da caixa que não é ocupado pelas esferas é igual a metade do volume das três esferas.

(**Nota**: designa por r o raio de uma esfera.)

Critérios específicos de classificação:

11...8

Escrever uma expressão que dê o volume da caixa, em função do raio da base ($\pi\tau^2 \times 6\tau$) 2

$\pi\tau^2 \times 6\tau = 6\pi\tau^3$ 1

Escrever uma expressão que dê o volume das três esferas, em função do raio de cada uma $\left(3\times\frac{4}{3}\pi\tau^3\right)$ 1

$3\times\frac{4}{3}\pi\tau^3 = 4\pi\tau^3$ 1

Escrever uma expressão que dê o volume da caixa não ocupado pelas esferas $(2\pi\tau^3)$ 2

Estabelecer a igualdade pedida (por exemplo, $\frac{1}{2}\times 4\pi\tau^3$) 1

Nota:
Se o examinando utilizar um valor aproximado de π (pi), a sua resposta deverá ser penalizada em 1 ponto.

Resolução proposta

Volume do cilindro = Área $_{\text{base}}$ $\times$ altura = $\pi r^2 \times 6r = 6\pi r^3$;

Volume das três esferas = $3 \times$ Área $_{\text{Esfera}}$ = $3 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^3$;

Volume da caixa não ocupado pelas esferas = $6\pi r^3 - 4\pi r^3 = 2\pi r^3$;

Metade do volume das três esferas = $4\pi r^3/2 = 2\pi r^3$

Concluir que o volume da caixa que não é ocupado é igual a metade do volume das três esferas.

A questão exige a visualização a três dimensões, a compreensão e a articulação dos dados fornecidos pelo enunciado e algum grau de abstracção ao comparar a figura 1 com uma situação real.
Aqui o aluno tem de saber distinguir demonstração de verificação de uma igualdade e dominar o conhecimento descrito pelo objectivo "Resolver problemas referentes a áreas e volumes de sólidos geométricos, incluindo a esfera" (DEB – ME, 2001/02, p. 61).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão requer a utilização de vários conhecimentos e a manipulação algébrica de fórmulas da área de um círculo, de volumes do cilindro e da esfera, que constam do formulário anexo à prova de exame.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios dedutivos semelhantes a outros já experimentados que assentam no uso de π e r, para encontrar os volumes da caixa e da esfera e poder verificar que o espaço na caixa não ocupado pelas esferas é metade do volume das três esferas.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  Classifico a resposta à questão como **multi-estrutural**.

Quadro 5.1 - Síntese de caracterização das questões do exame nacional do 9º ano - 2005/1ª chamada

Categoria / Domínio	Pré estrutural	Uni estrutural	Multi estrutural	Relacional	Abstracto	Total de itens
Estatística e Probabilidades	1.	4.				**2**
Números e Cálculo			2.1 6.			**2**
Álgebra e Funções		2.2b	2.2a 3.1 3.2 5.2	8.2		**5**
Geometria	8.1	5.1.1 5.1.2 10.	7.1 7.2 7.3 9. 11.			**9**
Total de itens	**2**	**4 ou 5**	**10 ou 11**	**1**	**0**	**18**

Um dos itens desta prova, 2.2, tem resposta de categoria diferente – é multi-estrutural se a resposta for obtida através do 1º processo de resolução e uni-estrutural se seguir o 2º processo.
Através do quadro-síntese é bem visível a importância atribuída à Geometria e o apelo a vários conhecimentos, pelo predomínio da categoria multi-estrutural.

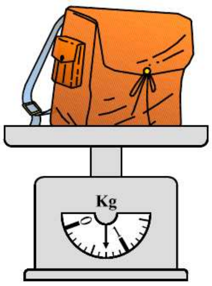
Prova 23 / 1ª Chamada / 2006

Questão 1

1. Muitos dos estudantes que usam mochilas transportam diariamente peso a mais para a sua idade.

1.1. Para evitar lesões na coluna vertebral, o peso de uma mochila e o do material que se transporta dentro dela não devem ultrapassar 10% do peso do estudante que a transporta.

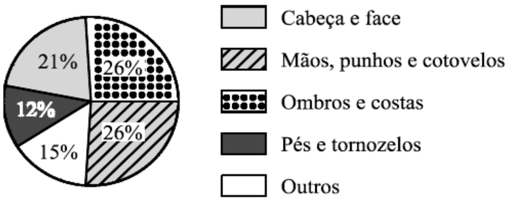
A Marta pesou a sua mochila.
Na balança da figura que se segue, está indicado o peso dessa mochila vazia.



Sabendo que a Marta pesa 45 kg, qual é, em kg, o peso máximo que ela poderá transportar **dentro da sua mochila**, de forma a evitar lesões na coluna vertebral?

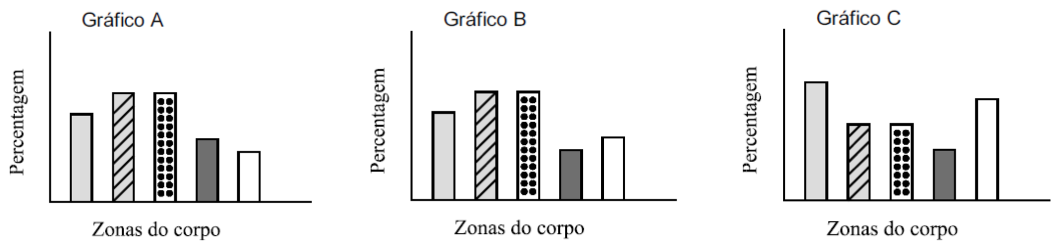
Apresenta todos os cálculos que efectuares.

1.2. O gráfico circular que se segue fornece informação sobre as zonas do corpo onde as lesões provocadas por mochilas são mais frequentes.



A Marta e duas das suas amigas começaram a construir, cada uma, um gráfico de barras que traduzisse a mesma informação deste gráfico circular.

Na figura que se segue, podes observar esses três gráficos.



Apenas um deles poderá corresponder ao gráfico circular apresentado. Qual?

Para cada um dos outros dois gráficos, indica uma razão que te leva a rejeitá-lo.

Critérios específicos de classificação:

1.1. 5

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Responde correctamente (3,8 ou 3,8 kg) e apresenta os cálculos efectuados 5

Exemplo 1:
$4{,}5 - 0{,}7 = 3{,}8$

Apresenta uma resolução completa, mas não lê correctamente o peso da mochila 4

Exemplo 1:
$4{,}5 - 1{,}3 = 3{,}2$

Apresenta uma resolução em que determina correctamente 10% do peso da Marta e lê correctamente o peso da mochila. Não determina, ou determina incorrectamente, o valor pedido, mas os valores obtidos não são absurdos **(ver nota)** 2

Exemplo 1:
$0{,}1 \times 45 = 4{,}5$
A mochila pesa $0{,}7\ kg$.

Exemplo 2:
$4{,}5 + 0{,}7 = 5{,}2$

Exemplo 3:
$0{,}1 \times 45 = 4{,}5$
A mochila pesa $700\ g$.
$4{,}5 - 0{,}07 = 4{,}43$

Responde apenas «3,8 ou 3,8 kg» 1
Dá outra resposta 0

Nota:
São exemplos de valores absurdos números não positivos ou números positivos superiores a 45.

1.2. 5

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Apresenta uma razão para rejeitar cada um dos dois gráficos incorrectos **(ver nota)** 5

Responde «Gráfico B» e apresenta uma razão para rejeitar um dos gráficos incorrectos **(ver nota)**.

Ou

Responde «Gráfico B» e justifica correctamente a sua opção, mas não apresenta qualquer razão para rejeitar os gráficos incorrectos 3

Apresenta uma razão para rejeitar um dos gráficos incorrectos (**ver nota**), mas não responde, ou responde incorrectamente 2

Responde apenas «Gráfico B» 1

Dá outra resposta 0

Nota:
Considera-se que está correcta a justificação para rejeitar um gráfico se o examinando indicar, para esse gráfico, por que razão pelo menos uma das barras não está de acordo com a informação do gráfico circular.

Resolução proposta – 1.1

O peso máximo que a Marta pode transportar dentro da sua mochila é 3,8 kg.

O aluno deve ler e perceber o enunciado do problema, que envolve dados fornecidos no enunciado e um dado lido na balança, e delinear uma estratégia para a sua resolução.

Fazer pesagens, reduzir de gramas a quilogramas, e vice-versa, operar com números decimais, "Interpretar uma percentagem num dado contexto", "Traduzir em linguagem matemática uma situação dada em linguagem corrente e reciprocamente" e "Resolver problemas utilizando as operações estudadas" (DHGEBS – ME, 1991, pp.38 e 34) são conhecimentos definidos pelos objectivos do programa à data em vigor.

10% = 10/100 = 0,10

10% do peso da Marta é dado por 0,10 × 45 = 4,5 kg.

A mochila vazia pesa 700 g = 0,7 kg

4,5 kg – 0,7 kg = 3,8 kg.

Mas, o problema poderá ser resolvido de outra forma se ao conhecimento descrito pelo objectivo "Traduzir em linguagem matemática uma situação dada em linguagem corrente …", juntar outro descrito pelo objectivo "Resolver equações do 1º grau com uma incógnita, sem denominadores, utilizando as regras" (DEB – ME, 01/02, p. 27).

A mochila vazia pesa 700 g = 0,7 kg.
Seja x o peso do conteúdo que a Marta pode transportar na sua mochila.

$$0{,}7 + x = 0{,}10 \times 45 \Leftrightarrow x = 4{,}5 - 0{,}7 \Leftrightarrow x = 3{,}8 \text{ kg}$$

Resolução proposta – 1.2

O gráfico B é o que está correcto.

No gráfico A, a barra correspondente a «pés e tornozelos» é maior do que a barra correspondente a «outros», quando deveria ser ao contrário, atendendo a que «pés e tornozelos» tem menor percentagem que «outros».
No gráfico C, por exemplo, a barra correspondente a «outros» é maior do que a barra correspondente a «ombros e costas», quando deveria ser ao contrário, atendendo a que «ombros e costas» tem maior percentagem que «outros».
"Ler e interpretar informação contida em tabelas ou gráficos", neste caso gráficos circular e de barras é um conhecimento do 2º ciclo, página 39.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O problema que pode ser visto como real, envolve vários conhecimentos. Todos eles são de grau inferior ao nível de escolaridade em apreço, se o método de resolução for o primeiro. Mas, se o aluno optar pelo 2º método um dos conhecimentos é do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Pesagem da mochila vazia. Leitura e interpretação da informação dada pelo gráfico circular e gráficos de barras, assim como raciocínios de carácter dedutivo para construir as respostas correctas.

- **Tipo de resposta**

  No item 1.1 a resposta é única e não fechada. No caso do item 1.2 a resposta não é única porque existe mais do que uma razão para rejeitar o gráfico C, o que pode levar à construção de respostas diferentes mas do mesmo tipo.

- **Categorização**

  Dependendo do processo utilizado, a resposta ao item 1.1 pode ser considerada **pré-estrutural** (1.1a) ou uni-estrutural (1.1b). A resposta ao item 1.2 é **pré-estrutural**.

Questão 2

2. Considera o conjunto A =[π,+∞ [.
Qual dos seguintes números pertence ao conjunto A?

- ☐ $3{,}1 \times 10^{-2}$ ☐ $3{,}1 \times 10^{0}$
- ☐ $3{,}1 \times 10^{-1}$ ☐ $3{,}1 \times 10^{1}$

Critérios específicos de classificação:

2... 5
A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente ($3{,}1\times10^{1}$) 5
Dá outra resposta...0

Resolução proposta

O único número que pertence ao conjunto A é $3{,}1\times 10^{1} = 3{,}1 \times 10 = 31$.

As quatro opções de resposta utilizam as potências de base 10 e expoente inteiro, na escrita de números usando a notação científica para interpretar e comparar esses números no sentido de ver qual deles é maior que π e pertence ao intervalo de números reais ilimitado à direita, nomeado de conjunto A.
Os conhecimentos ligados à notação científica, à comparação de números reais e aos intervalos de números reais são do programa 01/02, pp. 32 e 56.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve mais do que um conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio de carácter dedutivo e conclusões semelhantes a outras conhecidas para desfazer a notação científica e ver a ordem de grandeza de cada um dos números.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

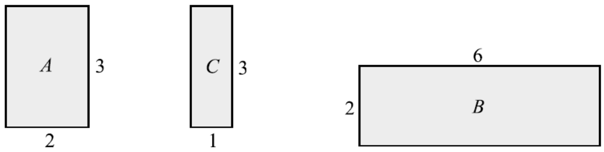
- **Categorização**

  A resposta à questão é **multi-estrutural**.

Questão 3

3. Na figura, estão representados três rectângulos, A, B e C cujas dimensões estão indicadas em centímetros (cm).

3.1. Apenas dois dos rectângulos representados na figura são semelhantes.



Indica a razão dessa semelhança, considerando-a uma **redução**.

Resposta ____

3.2. Existe um quadrado que tem o mesmo perímetro do que o rectângulo A.
Determina, em centímetros quadrados, a **área desse quadrado**.
Apresenta todos os cálculos que efectuares.

3.3. Imagina que o rectângulo A está inscrito numa circunferência.
Qual é o valor exacto do diâmetro dessa circunferência?
Apresenta todos os cálculos que efectuares.

Critérios específicos de classificação:

3.1. 4
A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Responde correctamente ($\frac{1}{2}$ ou equivalente)..4

Exemplo 1:
$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

Exemplo 2:
1 : 2

Há evidência de que identifica os dois rectângulos semelhantes, mas não responde, ou responde incorrectamente 2

Exemplo 1:
$\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$

Exemplo 2:
A razão de semelhança é 2.

Exemplo 3:
B e C têm os lados correspondentes directamente proporcionais.

Exemplo 4:
B é uma ampliação de C.

Dá outra resposta..0

Exemplo 1:
Dois rectângulos são semelhantes se tiverem os lados correspondentes directamente proporcionais.

3.2. 6
A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente (6,25 **ou** 6,25 cm^2) e apresenta os cálculos efectuados..6

Exemplo 1:
$10 \div 4 = 2{,}5$
$2{,}5 \times 2{,}5 = 6{,}25$

Apresenta uma resolução em que determina correctamente o perímetro do Rectângulo A (10 ou 10 cm) e a medida do lado do quadrado (2,5 ou 2,5 cm)...4

Exemplo 1:
$P = 2 \times 2 + 2 \times 3$
$P = 10$
$10 \div 4 = 2{,}5$

Exemplo 2:
$10 \div 4 = 2{,}5$
$A = 2{,}5 \times 2 = 5$

Responde apenas « 6,25 **ou** 6,25 cm^2»..1
Dá outra resposta..0

Exemplo 1:
$P = 2 \times 3 = 6$
$6 \div 4 = 1{,}5$
$A = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$

Exemplo 2:
$P = 10$
$10 \div 2 = 5$
$A = 25$

Exemplo 3:
$P = 10$
$10 \times 10 = 100$

3.3. 7

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Responde correctamente ($\sqrt{13}$ ou $\sqrt{13}$ cm) e apresenta os cálculos efectuados 7

Exemplo 1:
$d^2 = 3^2 + 2^2$
$d = \sqrt{13}$

Identifica correctamente o diâmetro da circunferência e aplica correctamente o teorema de Pitágoras. Não completa a resolução, ou completa-a incorrectamente, mas a resposta não é absurda (ver nota)..4

Exemplo 1:
$d^2 = 3^2 + 2^2$

Exemplo 2:
$d^2 = 3^2 + 2^2$
$d^2 = 6 + 4$
$d = \sqrt{10}$

Exemplo 3:
$d^2 = 3^2 + 2^2$
$d^2 = 13$
$d = 6{,}5$

Exemplo 4:
$d^2 = 3^2 + 2^2$
$d^2 = 6 + 4$
$d^2 = 10$
$d = 5$

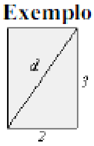
Há evidência de que identifica correctamente o diâmetro da circunferência, mas não aplica, ou aplica incorrectamente, o teorema de Pitágoras.

Ou

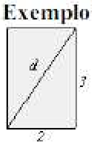
Identifica correctamente o diâmetro da circunferência e aplica correctamente o teorema de Pitágoras. Responde incorrectamente e a resposta é absurda **(ver nota)**..3

Exemplo 1:
O diâmetro da circunferência é a diagonal do rectângulo A.

Exemplo 2:



Exemplo 3:



$d^2 = 3^2 - 2^2$

Exemplo 4:
$d^2 - 3^2 = 2^2$
$d^2 = 4 - 9$
$d^2 = -5$
$d = \sqrt{-5}$

Exemplo 5:
$d^2 - 3^2 = 2^2$
$d^2 = 4 - 9$
$d = -5$

Indica apenas um valor compreendido entre 3,5 e 3,7 cm, inclusive 1

Dá outra resposta...0

Nota:
São exemplos de respostas absurdas valores não reais ou reais negativos.

Resolução proposta – 3.1

Os rectângulos B e C são semelhantes. A razão de semelhança que transforma B em C é $\frac{1}{2}$.

O aluno deve saber que duas figuras são semelhantes se são geometricamente iguais ou uma é ampliação da outra e ao ampliar ou reduzir figuras geométricas, neste caso rectângulos, os ângulos se mantêm e os comprimentos dos lados correspondentes são proporcionais – definição de polígonos semelhantes – mostrando dominar o conhecimento descrito pelo objectivo "Indicar exemplos de figuras semelhantes em objectos do dia-a-dia, no plano ou no espaço, ou num conjunto de figuras dadas".

Resolução proposta – 3.2

A área do quadrado que tem de perímetro 10 cm é 6,25 cm^2.

Perímetro de A = 2 + 2 + 3 + 3 = 10 cm.
O quadrado tem 4 lados iguais. Cada lado mede 2,5 cm (10:4).
Área do quadrado = 2,5 × 2,5 = 6,25 cm^2.

“Distinguir área de perímetro” e “Resolver problemas da vida corrente utilizando as operações (+, -, ×, :) e conhecimentos sobre áreas e perímetros de rectângulos e quadrados” são objectivos do programa do 2º ciclo, página 18.

Resolução proposta – 3.3

O valor exacto do diâmetro dessa circunferência é $\sqrt{13}$ cm.

Através de um esboço que facilite a compreensão, o aluno deve ter a percepção de que se o rectângulo A está inscrito na circunferência, os seus vértices são pontos da circunferência. Logo, o diâmetro da circunferência é igual à diagonal do rectângulo e esta divide-o em dois triângulos rectângulos geometricamente iguais. Deve dominar o conhecimento descrito pelo objectivo “Resolver problemas no plano e no espaço, aplicando o teorema de Pitágoras, recorrendo à calculadora sempre que aconselhável” (DEB – ME, 2001/02, p. 35) e saber aplicar este teorema a qualquer triângulo rectângulo onde não se saiba uma medida, neste caso a medida da hipotenusa, para além de ter a noção de valor exacto e valor aproximado de um resultado.
Seja d a diagonal do rectângulo. Pelo teorema de Pitágoras,

$$d^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow d^2 = 4 + 9 \Leftrightarrow d^2 = 13 \Leftrightarrow d = \sqrt{13}$$

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Os três itens exigem a aplicação de mais do que um conhecimento, sendo que, no caso de 3.2, esses conhecimentos são de grau inferior ao nível de escolaridade em apreço.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo e semelhantes a outros já experimentados. Em 3.3 o aluno terá que fazer um raciocínio um pouco mais elaborado, talvez com recurso a um esboço que represente um rectângulo inscrito numa circunferência, para poder deduzir algumas propriedades geométricas por análise da figura construída, fundamentar, justificar os raciocínios feitos e o processo utilizado na resolução do problema.

- **Tipo de resposta**

  As respostas aos três itens são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  Cada um dos itens 3.1 e 3.3 permite uma resposta **multi-estrutural** e o item 3.2 **pré-estrutural**.

Questão 4

4. A TAGARELA é uma nova empresa de comunicações que opera em Portugal.
O preço, P, em cêntimos, de uma chamada telefónica feita através desta empresa é calculado da seguinte forma:

$$P = \boxed{8} + \boxed{\begin{array}{l}\text{n.º de segundos de conversação,}\\ \textbf{para além do 1.º minuto}\end{array}} \times \boxed{\begin{array}{l}\text{preço, em cêntimos, por segundo de}\\ \text{conversação, }\textbf{para além do 1.º minuto}\end{array}}$$

Nesta fórmula, 8 é um valor fixo, em **cêntimos**, para pagar o início de qualquer chamada. Até ao fim do primeiro minuto de conversação, não há qualquer acréscimo de preço.

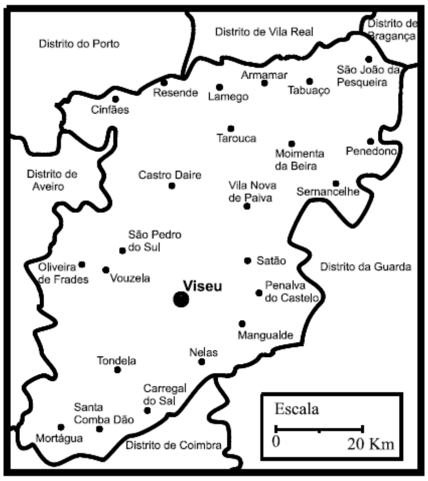
Para além do primeiro minuto, **o preço por segundo**, em cêntimos, é calculado de acordo com o seguinte tarifário:

TIPO DE CHAMADAS (de acordo com a distância, d, em km, entre os telefones)	**Horário Normal** 9 h - 21 h	**Horário Económico** 0 h - 9 h e 21 h - 24 h
LOCAIS $d < 15$	$0{,}1$ cêntimos	$0{,}07$ cêntimos
REGIONAIS $d \geq 15$ e $d \leq 35$	$0{,}2$ cêntimos	$0{,}14$ cêntimos
NACIONAIS $d > 35$	$0{,}3$ cêntimos	$0{,}21$ cêntimos

Sabendo que a Marta vive em Vila Nova de Paiva e é cliente da TAGARELA, responde aos dois itens que se seguem (**4.1**. e **4.2**.).

4.1. Usando material de desenho e de medição e de acordo com a escala dada, assinala, pintando a lápis no mapa, a zona correspondente às chamadas regionais que a Marta pode efectuar de Vila Nova de Paiva.

(Esta questão deve ser resolvida a lápis e não a tinta.)



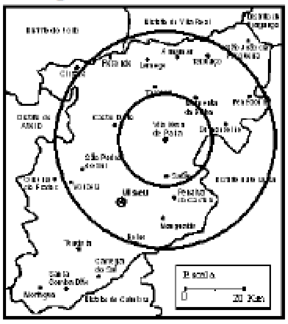
4.2. A Marta efectuou, às 17 horas, uma chamada de sua casa para Faro, com a duração de 1 minuto e 20 segundos.
Quanto irá pagar a Marta pela chamada, sabendo que Faro fica a mais de 400 quilómetros de Vila Nova de Paiva?
Apresenta todos os cálculos que efectuares.

Critérios específicos de classificação:

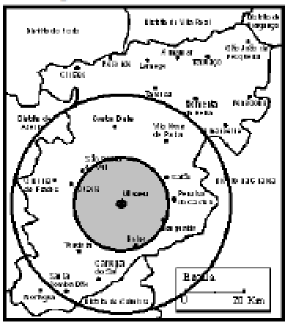
4.1. 7
A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Utiliza o compasso para desenhar, com rigor aproximado, duas circunferências, com centro em Vila Nova de Paiva, e pinta apenas a zona pedida **(ver nota)** 7
Utiliza o compasso para desenhar, com rigor aproximado, duas circunferências concêntricas, com centro num ponto do mapa que não Vila Nova de Paiva, e pinta apenas a região compreendida entre elas **(ver nota)** 6
Desenha, sem rigor aproximado, duas circunferências concêntricas, com centro num ponto do mapa e pinta apenas a região compreendida entre elas **(ver nota)** 4
Utiliza o compasso para desenhar, com rigor aproximado, duas circunferências concêntricas, com centro num ponto do mapa, mas não pinta a região compreendida

entre elas, ou não pinta apenas a região compreendida entre elas **(ver nota)**...3

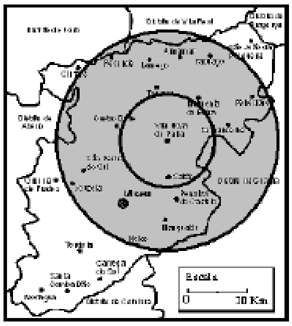
Exemplo 1:



Exemplo 2:

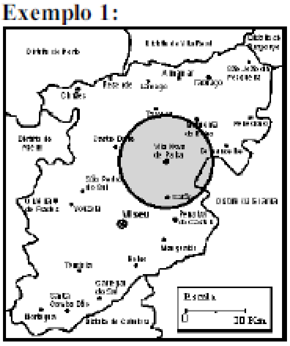


Exemplo 3:



Utiliza o compasso para desenhar, com rigor aproximado, uma circunferência com centro em Vila Nova de Paiva, e pinta correctamente apenas a zona correspondente a uma chamada local ou nacional (ver nota)..2

Exemplo 1:



Utiliza o compasso para desenhar, com rigor aproximado, uma das circunferências com centro num ponto do mapa (ver nota).

Ou

Assinala no mapa pontos pertencentes à zona pedida, mas não desenha nenhuma circunferência e não assinala nenhum ponto incorrecto...1

Dá outra resposta..0

Nota:

Considera-se que o desenho é feito com rigor aproximado se o comprimento do raio das circunferências desenhadas estiver compreendido entre 1,4 cm e 1,6 cm e entre 3,4 cm e 3,6 cm, respectivamente.

4.2. 6

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Responde correctamente (14 cêntimos ou 0,14 €) e apresenta os cálculos efectuados..................................6

Exemplo 1:

$8 + 20 \times 0{,}3 = 14$

Apresenta uma resolução completa, em que revela compreender como se determina o preço de uma chamada, mas identifica incorrectamente o tipo de chamada ou considera 80 segundos de conversação, para além do primeiro minuto..4

Exemplo 1:

$8 + 0{,}2 \times 20 = 8 + 4 = 12$

Exemplo 2:

$0{,}21 \times 20 = 4{,}2$

A Marta irá pagar 12,2 cêntimos.

Exemplo 3:

$8 + 80 \times 0{,}3 = 32$

Apresenta uma resolução incompleta, em que determina correctamente o Valor a pagar pela chamada, para além do primeiro minuto ($0{,}3 \times 20$)..3

Responde apenas «14 cêntimos» ou 0,14 €».

Ou

Identifica correctamente o tipo da chamada, mas não determina o seu preço, ou determina-o incorrectamente..1

Exemplo 1:

$0{,}3 \times 80 = 24$

A Marta irá pagar 24 cêntimos pela chamada.

Exemplo 2:

A chamada é nacional e foi feita em horário normal.

Exemplo 3:

$8 + 0{,}3 = 8{,}3$

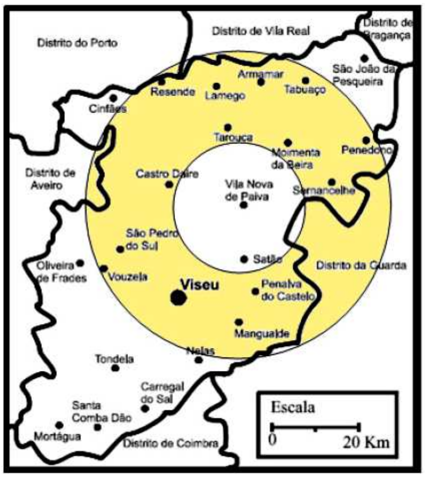
Dá outra resposta..0

Exemplo 1:

A chamada durou 80 segundos.

Resolução proposta – 4.1

O aluno deve pintar a lápis no mapa da prova, a região limitada por duas circunferências centradas em Vila Nova de Paiva, uma com 1,5 cm de raio e outra com 3,5 cm de raio, atendendo à escala e à distância entre 15 a 35 km.



Para resolver o item são essenciais os conhecimentos descritos pelos objectivos "Calcular distâncias reais a partir da sua representação em mapas, plantas, etc., conhecida a escala", "Identificar o conjunto de pontos do plano que estão a uma distância d (menor que d ou maior que d) de um ponto dado" e "Determinar o conjunto de pontos que satisfazem uma conjunção de condições" (DEB – ME, 01/02, pp. 21 e 41).

Resolução proposta – 4.2

A Marta irá pagar pela chamada para Faro 14 cêntimos.

$P = 8 + 0{,}3 \times 20 = 8 + 6 = 14$

A Marta paga 8 cêntimos até ao final do primeiro minuto de conversação. Como fez uma chamada nacional e em horário normal, vai pagar 0,3 cêntimos por cada segundo que passe para além do primeiro minuto, ou seja $0{,}3 \times 20 = 6$ cêntimos mais 8 cêntimos que são fixos.

Este problema que pode ser visto como real, tem o texto do enunciado muito extenso o que pode levar o aluno a perder-se no meio de toda a informação que é relevante, tais como a fórmula de cálculo do preço a pagar por uma chamada da empresa TAGARELA, a interpretação da tabela de custo para cada tipo de chamada em horário normal ou económico, a análise e interpretação do mapa, a localização de Vila Nova de Paiva e a leitura da escala e compreensão do seu significado.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Na resolução de cada um dos itens estão envolvidos mais do que uma parcela de conhecimento.

- **Operações envolvidas**

  O aluno vai ter que construir uma figura geométrica, utilizando instrumentos de medição e de desenho, e descrever por palavras suas o processo usado na construção (4.1) e utilizar o modelo apresentado para calcular o custo de uma chamada (4.2).

  A actividade vai ser acompanhada de raciocínios dedutivos, com base na utilização da informação que é necessária para a resolução de cada um dos itens e conclusões semelhantes a outras já experimentadas, nomeadamente no tema «Lugares Geométricos».

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

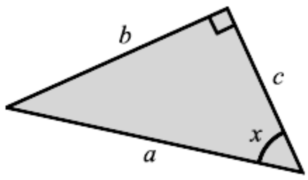
  Cada um dos itens permite uma resposta **multi-estrutural**.

Questão 5

5. Na figura, está representado um triângulo rectângulo em que:

• a, b, c são as medidas de comprimento dos seus lados, em centímetros;

• x é a medida da amplitude de um dos seus ângulos agudos, em graus.



Apresentam-se a seguir quatro igualdades. **Apenas uma** está correcta. Qual?

☐ $sen\,x = \frac{b}{a}$ ☐ $sen\,x = \frac{a}{b}$

☐ $sen\,x = \frac{b}{c}$ ☐ $sen\,x = \frac{c}{a}$

Critérios específicos de classificação:

5... 5

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Responde correctamente (sen $x = \frac{b}{a}$).. 5

Dá outra resposta.. 0

Resolução proposta

A igualdade que está correcta é sen $x = \frac{b}{a}$.

Aqui o aluno necessita de dominar o conhecimento "Determinar razões trigonométricas de um ângulo agudo" num triângulo rectângulo. (DEB – ME, 2001/02, p. 60).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve um único conhecimento adquirido no 9º ano.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios dedutivos para, através da figura, identificar o cateto oposto ao ângulo x e a hipotenusa do triângulo.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **uni-estrutural**.

<u>Questão 6</u>

6. Resolve a seguinte equação:

$$\frac{x^2 - 1}{3} = 1 - x$$

Critérios específicos de classificação:

6. 7

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item, como por exemplo:

1.º Processo
A cotação deverá ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Desembaraçar a equação de denominadores 2
Obter uma equação equivalente à dada, na forma $ax^2 + bx + c = 0$ 1
Substituir correctamente, na fórmula resolvente, a, b e c pelos respectivos
valores **(ver nota 1)**.. 2
Obter as soluções da equação (- 4 e 1) **(ver nota 2)** 2

Notas:
1. Se o examinando não identificar correctamente os três coeficientes, a, b e c, a esta etapa deverão ser atribuídos zero pontos.
2. Se o examinando obtiver apenas uma das duas soluções da equação, esta etapa deverá ser desvalorizada em 1 ponto.

2.º Processo
A cotação deverá ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Verificar que - 4 é solução... 1
Verificar que 1 é solução.. 1
Referir que uma equação do 2.º grau não tem mais do que duas soluções 5

Resolução proposta

O conjunto solução da equação é {- 4, 1}

"Resolver equações do 2º grau, procurando utilizar o processo mais adequado a cada situação" é um objectivo do programa do 3º ciclo, ME – página 59.

1º processo

$$\frac{x^2-1}{3}=1-x \Leftrightarrow x^2-1=3-3x \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow ...$$

Perante uma equação o aluno começa por a resolver de forma sequencial: reduzir ao mesmo denominador, eliminar os denominadores, reduzir os termos semelhantes e, dado que se trata de uma equação do 2º grau completa, pôr na forma canónica: $ax^2+bx+c=0$, para poder utilizar a fórmula resolvente que consta do formulário anexo à prova.

2º processo

O aluno deve saber que «uma equação do 2º grau pode ter, no máximo, duas soluções reais» - 9º ano, dominar o conhecimento descrito pelo objectivo "Determinar valores numéricos de expressões com variáveis" (DEB – ME, 01/02, p. 23) e tentar encontrar o par de números que verifica a igualdade.

$$\frac{x^2-1}{3}=1-x$$

Se x = - 4, $\frac{(-4)^2-1}{3}=\frac{16-1}{3}=\frac{15}{3}=5$ e 1 – (-4) = 1 + 4 = 5

Se x = 1 $\frac{1^2-1}{3}=0$ e 1 – 1 = 0

Processos distintos que conduzem à mesma resposta.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Na resolução da questão estão envolvidos mais do que um conhecimento ao nível do 3º ciclo do ensino básico.

- **Operações envolvidas**

  Utilização dos princípios de equivalência das equações até chegar à forma $ax^2+bx+c=0$, **dedução** da necessidade de utilização da fórmula resolvente para encontrar as soluções da equação dada ou cálculo do valor de expressões com uma variável.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e não fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **multi-estrutural**.

Questão 7

7. Na fotografia (figura A), podes observar um dos vulcões de água da Alameda dos Oceanos, no Parque das Nações, em Lisboa. Estes vulcões expelem, periodicamente, jactos de água.
Na figura B, está representado um cone de revolução.

A parte sombreada desta figura é um esquema do sólido que serviu de base à construção do vulcão de água.

Figura A

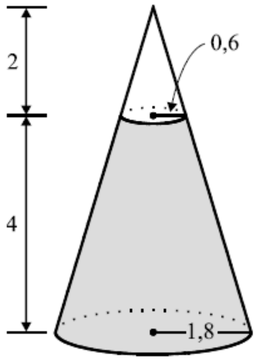


Figura B

As medidas de comprimento indicadas estão expressas em metros.
1,8 m e 0,6 m são os comprimentos dos raios das duas circunferências.
A altura do cone é 6 m.

Determina, em metros cúbicos, o volume do sólido representado no esquema a sombreado.

(Se a tua calculadora não possui a tecla π utiliza o valor aproximado 3,14.) Indica o resultado arredondado às unidades e apresenta todos os cálculos que efectuares. Sempre que, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva duas casas decimais.

Critérios específicos de classificação:

7. 7

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Determina correctamente o volume pedido, aproximado às unidades (20 ou 20 m^3)
e apresenta os cálculos efectuados **(ver nota)** 7

Exemplo 1:

$$V = \frac{\pi \times 1{,}8^2 \times 6}{3} - \frac{\pi \times 0{,}6^2 \times 2}{3} \approx 20{,}36 - 0{,}75 = 19{,}61$$

O volume é $20\ m^3$.

Apresenta uma resolução em que revela compreender que o volume pedido corresponde à diferença do volume dos dois cones ou a um tronco de cone. Substitui correctamente todos os valores na(s) fórmula(s), mas não calcula o volume pedido, ou calcula-o incorrectamente **(ver nota)** 5

Exemplo 1:

$$V = \frac{\pi \times 1{,}8^2 \times 6}{3} - \frac{\pi \times 0{,}6^2 \times 2}{3}$$

Exemplo 2:

$$V = \left(\frac{\pi \times 4}{3}\right)(1{,}8^2 + 1{,}8 \times 0{,}6 + 0{,}6^2)$$

Apresenta uma resolução em que revela compreender que o volume pedido corresponde à diferença do volume dos dois cones ou a um tronco de cone.
Não substitui correctamente um dos valores na(s) fórmula(s) 4

Exemplo 1:

$$V = \frac{\pi \times 1{,}8^2 \times 6}{3} - \frac{\pi \times 0{,}6^2 \times 4}{3}$$

Exemplo 2:

$$V = \frac{\pi \times 1{,}8^2 \times 6}{3} \approx 20{,}36$$

$$V = \frac{\pi \times 0{,}6^2 \times 4}{3} \approx 1{,}51$$

$20{,}36 - 1{,}51 = 18{,}85$

Determina correctamente o volume dos dois cones e apresenta os cálculos efectuados.
(ver nota) 3

Exemplo 1:

$$V = \frac{\pi \times 1{,}8^2 \times 6}{3} \approx 20,36$$

$$V = \frac{\pi \times 0{,}6^2 \times 2}{3} \approx 0{,}75$$

$20{,}36 + 0{,}75 = 21{,}11$

Exemplo 2:

$$V = \frac{\pi \times 1{,}8^2 \times 6}{3} \approx 20{,}36$$

$$V = \frac{\pi \times 0{,}6^2 \times 2}{3} \approx 0{,}75$$

Determina correctamente o volume de um dos cones e apresenta os cálculos efectuados.
(ver nota) 2

Exemplo 1:

$V = \frac{\pi \times 1{,}8^2 \times 6}{3} \approx 20,36$

O volume é $20\ m^3$.

Exemplo 2:

$V = \frac{\pi \times 1{,}8^2 \times 4}{3} \approx 13{,}57$

$V = \frac{\pi \times 1{,}8^2 \times 6}{3} \approx 20{,}36$

Dá outra resposta.. 0

Exemplo 1:
O volume do sólido é $20\ m^3$.

Exemplo 2:

$V = \frac{\pi \times 1{,}8^2 \times 4}{3}$

Exemplo 3:
$A = \pi \times 3{,}24$

Nota: Se o examinando, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos e desrespeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservação de 2 casas decimais, a sua resposta deverá ser desvalorizada em 1 ponto.

Resolução proposta

$$V = \frac{\pi \times 1{,}8^2 \times 6}{3} - \frac{\pi \times 0{,}6^2 \times 2}{3} = 19{,}60... \approx 20\,\text{m}^3$$

O aluno deve ler atentamente toda a informação que é dada no enunciado, utilizar os dados de uma forma correcta nas fórmulas da área do círculo e do volume do cilindro que fazem parte do formulário anexo à prova de exame, apresentar todos os cálculos que efectuar e respeitar todas as exigências que lhe são propostas, nomeadamente a de indicar o resultado arredondado às unidades e compreender, através das figuras e de uma visualização a três dimensões, que o volume do sólido representado no esquema a sombreado, corresponde à diferença do volume dos dois cones. Assim, o aluno mostra dominar os conhecimentos descritos pelos objectivos "Determinar áreas e volumes de sólidos e de objectos da vida real" e "Indicar valores aproximados de um dado número real controlando o erro" (DEB – ME, 01/02, pp. 26 e 55).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve a aplicação de mais do que um conhecimento e uma oportunidade para articular e sistematizar noções já adquiridas.

- **Operações envolvidas**

  Manipulação algébrica de fórmulas da área do círculo e do volume de um cone, dadas as medidas necessárias para o seu cálculo. Saber fazer arredondamentos. Utilizar raciocínios dedutivos que resultam da observação do esquema do sólido – figura B – que serviu de base à construção do vulcão de água e tirar conclusões úteis ao cálculo do volume solicitado.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  Classifico a resposta a esta questão como **multi-estrutural**.

Questão 8

8. Os alunos da turma da Marta combinaram encontrar-se no Parque das Nações.
Cada um deles utilizou apenas um meio de transporte para chegar ao parque.
Na tabela que se segue, podes observar os meios de transporte usados e o número de alunos que utilizou cada um deles.

Transporte	Comboio	Metropolitano	Autocarro	Bicicleta
N.º de alunos	9	12	6	3

Escolhendo, ao acaso, um aluno da turma da Marta, qual dos seguintes valores é o da probabilidade de esse aluno não ter ido de autocarro?

☐ 60% ☐ 70% ☐ 80% ☐ 90%

Critérios específicos de classificação:

8. 5

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente (80%) 5
Dá outra resposta 0

Resolução proposta

A resposta correcta é 80%.

Número de alunos na turma = 9 + 12 + 6 + 3 = 30

Número de alunos que não foi de autocarro = 9 + 12 + 3 = 24

A probabilidade pedida é $\frac{24}{30} = 0{,}8 = 80\%$

Mas se o aluno decidir ir pelo acontecimento contrário …

Número de alunos na turma = 9 + 12 + 6 + 3 = 30

Probabilidade de o aluno ter ido de autocarro = $\frac{6}{30}$

Probabilidade de o aluno não ter ido de autocarro = $1 - \frac{6}{30} = \frac{30}{30} - \frac{6}{30} = \frac{24}{30} = 0{,}8$

"Calcular, em casos simples, a probabilidade de um acontecimento como quociente entre número de casos favoráveis e número de casos possíveis" é um conhecimento adquirido no 9º ano (ME, p. 51) e é aplicado nas duas resoluções. Mas, a que está em 2º lugar requer a utilização da probabilidade do acontecimento certo e do cálculo da probabilidade de acontecimento contrário.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O aluno tem de dominar pelo menos o conhecimento descrito no objectivo acima referido.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios dedutivos para poder aplicar a lei de Laplace – quociente entre número de casos favoráveis (24) e número de casos possíveis (30) e semelhantes a outros já muito experimentados em sala de aula.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e não fechada.

- **Categorização**

  A resposta é **uni-estrutural** se utilizar a 1ª resolução (8.a) e sobe para o patamar superior do modelo de caracterização (**multi-estrutural**) se utilizar a 2ª resolução (8.b).

Questão 9

9. Numa aula de Matemática, a turma da Marta envolveu-se na procura de propriedades de números. A certa altura a Marta afirmou:

«Se pensar em dois números naturais consecutivos e subtrair o quadrado do menor ao quadrado do maior, obtenho sempre um número que não é múltiplo de dois.»

9.1. Escolhe dois números naturais consecutivos e verifica que, para esses números a afirmação da Marta é verdadeira.

9.2. Designando por n um número natural mostra que $(n+1)^2 - n^2$ é sempre um número que não é múltiplo de dois.

Critérios específicos de classificação:

9.1. 4

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Com dois números naturais consecutivos, efectua correctamente o procedimento implícito na afirmação 4

Exemplo 1:
$8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$

Dá outra resposta 0

Exemplo 1:
$8^2 - 7^2 = 16 - 14 = 2$

Exemplo 2:
$10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$

9.2. 6

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Desenvolve correctamente a expressão dada e apresenta uma explicação correcta para o facto de $2n+1$ não ser múltiplo de dois 6

Exemplo 1:
$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$
$2n+1$ é ímpar, por isso não é múltiplo de 2.

Desenvolve correctamente a expressão dada, mas não apresenta uma explicação para o facto de $2n+1$ não ser múltiplo de dois, ou apresenta-a incorrectamente 3

Exemplo 1:
$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + n + n + 1 - n^2 = n + n + 1 = 2n + 1$

Exemplo 2:
$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$

Exemplo 3:
$n^2 + 2n + 1 - n^2$

Não desenvolve correctamente a expressão dada, mas obtém uma expressão em n. Apresenta uma explicação em que evidencia compreender se essa expressão designa um número que não é múltiplo de dois 2

Exemplo 1:
$n^2 + 2n + 2 - n^2 = 2n + 2$
$2n$ é par, por isso $2n + 2$ é múltiplo de 2.

Dá outra resposta 0

Exemplo 1:
$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 1 - n^2 = 1$
1 é ímpar, por isso não é múltiplo de 2.

Exemplo 2:
$n^2 + 2 - n^2 = 2$
2 é múltiplo de 2.

Resolução proposta – 9.1

A afirmação da Marta é verdadeira.

Leitura, interpretação e compreensão do conteúdo da afirmação e tradução da mesma para linguagem matemática (DHGEBS – ME, 1991, p. 14).

Por exemplo, 5 e 6.

Verificação da propriedade enunciada: $6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$

A propriedade verifica-se. Pois 11 é um número impar, logo não é múltiplo de 2.

Resolução proposta – 9.2

$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

Se n = 1, 2 × 1 + 1 = 3;

Se n = 2, 2 × 2 + 1 = 5;

Se n = 3, 2 × 3 + 1 = 7.

Sendo n um número natural, 2n + 1 representa um número impar, logo não é múltiplo de 2.

A questão envolve passar da linguagem escrita para a linguagem matemática e operar com "Potências de expoente natural" (DHGEBS – ME, 1991, p. 12), o conhecimento descrito pelo objectivo " Operar com polinómios simples" (DEB – ME, 2001/02, p. 42), nomeadamente com o quadrado de binómio, a adição algébrica entre monómios e calcular o valor numérico de uma expressão com uma variável. A expressão que consta de 9.2 é uma generalização da afirmação em 9.1 e que se prova que é verdadeira.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O primeiro item (9.1) envolve conhecimentos que o aluno detém no 2º ciclo e o segundo (9.2) requer a utilização de mais do que um conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo, para verificar a afirmação (9.1) e mostrar em 9.2 que a expressão origina um número ímpar.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são não únicas mas do mesmo tipo.

- **Categorização**

  O item 9.1 é uma questão de resposta ao nível **pré-estrutural** e 9.2 **multi-estrutural**.

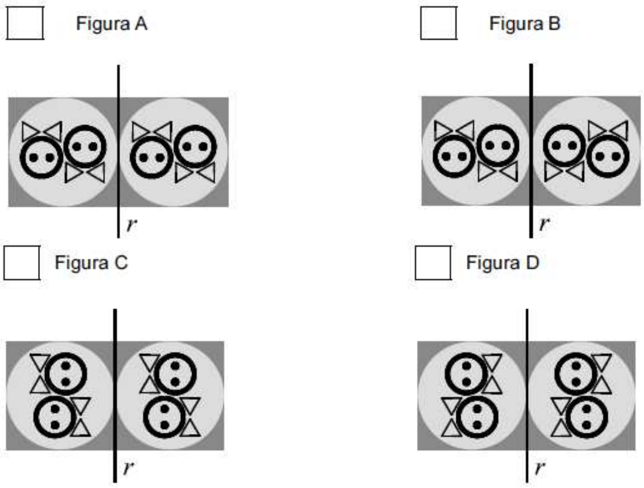
Questão 10

10. O símbolo ao lado está desenhado nas placas do Parque das Nações que assinalam a localização dos lavabos.

As quatro figuras a seguir representadas foram desenhadas com base nesse símbolo.

Em cada uma delas, está desenhada uma recta r .

Em qual delas a recta r é um eixo de simetria?



Critérios específicos de classificação:

10. 4

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente (Figura B) 4
Dá outra resposta 0

Resolução proposta

A resposta correcta é figura B.

No 2º ciclo o aluno domina o conhecimento descrito pelo objectivo “Descobrir e traçar eixos de simetria de figuras geométricas simples” (DHGEBS – ME, 1991, p. 34). É pedido ao aluno para ver em qual das quatro figuras a recta r é um eixo de simetria da figura inicialmente dada.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  É envolvido um conhecimento de grau inferior ao nível de escolaridade em apreço.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio de carácter dedutivo.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **pré-estrutural**.

Questão 11

11. Considera o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x = y \\ 2(x+y) = 3 \end{cases}$$

Qual dos quatro pares ordenados (x, y) que se seguem é a solução deste sistema?

☐ $(1, 2)$ ☐ $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

☐ $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ☐ $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

Critérios específicos de classificação:

11.... 5

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Responde correctamente $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 5

Dá outra resposta.. 0

Resolução proposta

O par ordenado $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ é solução do sistema.

$$2 \times \frac{1}{2} = 1 \wedge 2 \times \left(\frac{1}{2} + 1\right) = 3 \text{ (verdade)}$$

O aluno no 9º ano domina o conhecimento descrito pelo objectivo do programa “Verificar se um par ordenado é solução de um sistema” (DEB – ME, p.52).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão exige a aplicação de um só conhecimento.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio dedutivo semelhante a outros já muito praticados em aula.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

o **Categorização**

A resposta é de nível **uni-estrutural**.

Questão 12

12. Na fotografia abaixo (figura A), podes ver o teleférico do Parque das Nações.
A seu lado, na figura B, está representado um esquema do circuito (visto de cima) efectuado por uma cabina do teleférico.

Figura A

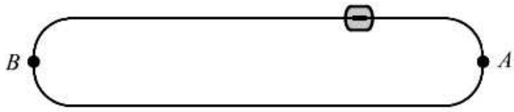


Figura B

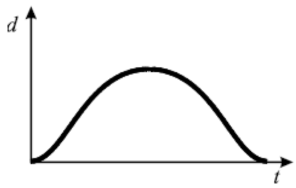
12.1. Uma cabina parte do ponto A, passa por B e regressa ao ponto A, sem efectuar paragens durante este percurso.

Sejam:

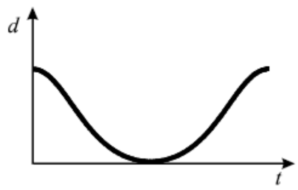
- t o tempo que decorre desde o instante em que a cabina parte do ponto A;
- d a distância dessa cabina ao ponto A.

Qual dos gráficos seguintes poderá representar a relação entre t e d?

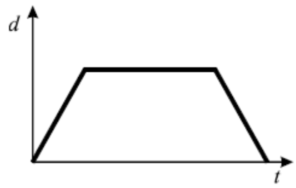
☐ Gráfico A



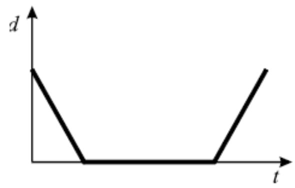
☐ Gráfico B



☐ Gráfico C



☐ Gráfico D



12.2. No teleférico do Parque das Nações, o número de cabinas em utilização não é sempre o mesmo, mas duas cabinas consecutivas estão sempre igualmente espaçadas.
O ajuste da distância entre as cabinas é feito automaticamente, de acordo com a seguinte fórmula,

$$n \times c = 3$$

em que:

c representa a distância, em quilómetros, entre duas cabinas consecutivas;

n é o número total de cabinas em utilização.

Quando o teleférico está em funcionamento, a sua velocidade média pode variar entre 11 e 17 quilómetros por hora.

Qual é o maior número possível de voltas completas que uma cabina pode dar durante uma hora?
Justifica a tua resposta, começando por referir o significado da constante na fórmula $n \times c = 3$.

Critérios específicos de classificação:

12.1.. 5
A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente (Gráfico A) 5
Dá outra resposta..0

12.2.. 7
A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Responde correctamente (5 ou 5 voltas) e apresenta uma estratégia completa e correcta **(ver nota)** 7

Exemplo 1:
3 é o comprimento de uma volta completa.
$\frac{17}{3} = 5,(6)$
O maior número possível de voltas é 5.

Exemplo 2:
1 volta completa são 3 km.
Em 4 voltas, são percorridos 12 km e, em 5 voltas, são percorridos 15 km.
5 é o maior número possível de voltas.

Apresenta uma estratégia correcta, em que identifica o comprimento de uma volta completa (3 km), mas não responde, ou responde incorrectamente **(ver nota)**.................. 5

Exemplo 1:
1 volta são 3 km.
$\frac{17}{3} = 5,(6)$

Exemplo 2:
1 volta são 3 km.
$\frac{17}{3} = 5,(6)$
6 voltas.

Apresenta uma estratégia incompleta, mas correcta, em que identifica o comprimento de uma volta completa (3 km). Não responde, ou responde incorrectamente **(ver nota)**.

Ou

Identifica correctamente o comprimento de uma volta completa (3 km) 3

Exemplo 1:
Uma volta completa são 3 km.
$\frac{10}{3} < \frac{11}{3} < \frac{12}{3} = 4$
No máximo, percorre 4 voltas completas durante uma hora.

Exemplo 2:
1 volta são 3 km.

Responde apenas «5» ou «5 voltas» 1
Dá outra resposta 0

Exemplo 1:
$\frac{11}{17} = \frac{3}{x}$

Nota:
Se o examinando não referir o significado da constante 3 na fórmula $n \times c = 3$, a sua resposta deverá ser desvalorizada em 2 pontos.

Resolução proposta – 12. 1

A relação entre *t* e *d* é representada pelo gráfico A.

A cabine parte do ponto A e, à medida que o tempo *t* decorre, a distância *d* dessa cabine ao ponto A vai aumentado até chegar ao ponto B. Depois a cabine começa, de novo, a aproximar-se do ponto A.
O aluno ao visualizar o percurso do teleférico, deve identificar uma correspondência entre a Matemática e a vida real, relacionando entre si a linguagem analítica e a gráfica traduzida por uma função onde a distância *d*, da cabine ao ponto A depende do tempo *t*, que decorre desde o instante em que a cabine parte de A.

Resolução proposta – 12. 2

O maior número possível de voltas completas que uma cabine pode dar, durante uma hora é 5.

Sabe-se que $n \times c = 3$. As grandezas *n* e *c* são inversamente proporcionais. A constante de proporcionalidade inversa é 3 e representa a distância que uma cabine percorre ao fazer uma volta completa (3 km).
O maior número de voltas ocorre quando a velocidade média for a maior possível, neste caso é 17 km/h. Como 17/3 $\approx$ 5,7, conclui-se que no máximo uma cabine durante uma hora pode dar 5 voltas completas.

O item apresenta um grau de exigência elevado, fundamentalmente pela forma como se apresenta – texto extenso e que exige um trabalho elaborado de interpretação. Para o resolver o aluno deve dominar os conhecimentos descritos pelos objectivos “Reconhecer situações de proporcionalidade inversa, indicando a constante de proporcionalidade” e “Resolver problemas da vida corrente, da Matemática ou doutras ciências, que envolvam proporcionalidade inversa” (DEB, 2001/02, p. 54).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Em 12.1, por análise e interpretação da figura *B*, o aluno deve identificar que existe uma relação – função – em que *d* depende de *t* e que esta se pode representar graficamente. O item 12.2 requer uma boa articulação entre toda a informação fornecida, compreensão do que está em causa e envolve mais do que um conhecimento que devem ser relacionados.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo e/ou indutivo, em particular para desenvolver uma estratégia de resolução para o item 12.2.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  O item 12.1 é de resposta ao nível **uni-estrutural** e 12.2 de resposta **relaciona**l.

Quadro 5.2 - Síntese de caracterização das questões do exame nacional do 9º ano - 2006/1ª chamada

Categoria / Domínio	Pré estrutural	Uni estrutural	Multi estrutural	Relacional	Abstracto	Total de itens
Estatística e Probabilidades	1.2	8.a	8.b			**2**
Números e Cálculo	1.1a 9.1	1.1b	2. 9.2			**4**
Álgebra e Funções		11. 12.1	4.2 6.	12.2		**5**
Geometria	3.2 10.	5.	3.1 3.3 4.1 7.			**7**
Total de itens	**4 ou 5**	**4 ou 5**	**8 ou 9**	**1**	**0**	**18**

Dependendo do processo de resolução utilizado, a resposta ao item 1.1 pode ser pré-estrutural (1.1a) ou uni-estrutural (1.1b) e a resposta à questão 8 é uni-estrutural (8.a) ou multi-estrutural.

A Geometria e os itens categorizados como de resposta multi-estrutural voltam a ser privilegiados. Presume-se que a prova tenha sido mais acessível aos alunos que foram sujeitos à sua resolução do que a 2005/1ªchamada, por dela constarem alguns itens que se reportam a um nível de escolaridade anterior ao que está em avaliação e permitirem respostas da categoria pré-estrutural.

Prova 23 / 2ª Chamada / 2007

Questão 1

1. O Paulo tem dois dados, um branco e um preto, ambos equilibrados e com a forma de um cubo.

As faces do dado branco estão numeradas de 1 a 6, e as do dado preto estão numeradas de – 6 a – 1.

O Paulo lançou uma vez os dois dados e adicionou os valores registados nas faces que ficaram voltadas para cima.

Qual é a probabilidade de essa **soma** ser um **número negativo**?

Apresenta o resultado na forma de fracção.

Mostra como obtiveste a tua resposta.

Critérios específicos de classificação:

1...6

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Responde correctamente $\left(\frac{5}{12} \, ou \, \frac{15}{36}\right)$ e mostra como obteve a resposta...6

Exemplo 1:

Adição	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$
-1						
-2	-1					
-3	-2	-1				
-4	-3	-2	-1			
-5	-4	-3	-2	-1		
-6	-5	-4	-3	-2	-1	

A probabilidade é de $\frac{15}{36}$.

Exemplo 2:

$(-2, 1); (-3, 1); (-4, 1); (-5, 1); (-6, 1)$
$(-3, 2); (-4, 2); (-5, 2); (-6, 2)$
$(-4, 3); (-5, 3); (-6, 3)$
$(-5, 4); (-6, 4)$
$(-6, 5)$

Num lançamento de dois dados, os casos possíveis são 36.

A probabilidade é de $\frac{15}{36}$.

Mostra como obteve a resposta, identificando correctamente o número de casos possíveis, mas incorrectamente o número de casos favoráveis. De acordo com o erro cometido, indica correctamente a probabilidade, cujo valor terá de estar compreendido entre 0 e 1 5

Mostra como obteve a resposta, identificando correctamente o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, **mas não** indica a probabilidade pedida, **ou** indica-a incorrectamente..4

Mostra como obteve a resposta, identificando incorrectamente o número de casos possíveis. De acordo com o erro cometido, identifica correctamente o número de casos favoráveis e a probabilidade, cujo valor terá de estar compreendido entre 0 e 1..3

Responde correctamente $\left(\frac{5}{12} \; ou \; \frac{15}{36}\right)$,mas **não mostra** como obteve a resposta 1

Dá outra resposta 0

Resolução proposta

A probabilidade da soma ser um número negativo é $\frac{15}{36}$.

Para responder à questão, o aluno tem de dominar o conhecimento descrito pelo objectivo "Calcular, em casos simples, a probabilidade de um acontecimento como quociente entre número de casos favoráveis e número de casos possíveis" (DEB – ME, 01/02, p. 51). Para identificar os casos possíveis e os casos favoráveis pode ser construída uma tabela de dupla entrada como a que é apresentada ao lado:

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
-1	0	1	2	3	4	5
-2	-1	0	1	2	3	4
-3	-2	-1	0	1	2	3
-4	-3	-2	-1	0	1	2
-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

Há 15 casos em que a soma dos valores registados nas faces dos dois cubos que ficam voltadas para cima é um número negativo, num total de 36 casos possíveis.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  É exigido ao aluno o domínio de um único conhecimento descrito no objectivo referido anteriormente.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo semelhantes a outros já muito praticados em sala de aula.

- **Tipo de resposta**

  A resposta não é única mas é do mesmo tipo, já que o aluno pode responder $\frac{15}{36}$ ou $\frac{5}{12}$.

- **Categorização**

  A questão permite uma resposta **uni-estrutural**.

Questão 2

2. Considera um segmento de recta [AB] com 4 cm de comprimento.

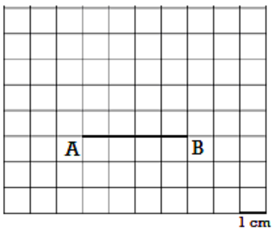
2.1. Efectuou-se uma redução do segmento de recta [AB].

O segmento de recta obtido tem 0,8 cm de comprimento.

Qual dos seguintes valores é igual à razão de semelhança desta redução?

☐ 0,2 ☐ 0,3 ☐ 0,4 ☐ 0,5

2.2. Na figura abaixo, está desenhado o segmento de recta [AB], numa malha quadriculada em que a unidade de comprimento é um centímetro.



Existem vários triângulos com 6 cm^2 de área.
Recorrendo a material de desenho e de medição, **constrói, a lápis**, nesta malha, um desses triângulos, em que um dos lados é o segmento de recta [AB].

Apresenta todos os cálculos que efectuares.

Critérios específicos de classificação:

2.1. 5
Responde correctamente (0,2) 5
Dá outra resposta 0

2.2. 5

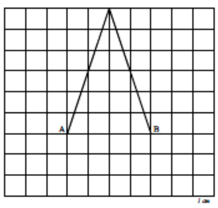
A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Constrói correctamente um triângulo, de acordo com o pedido, e apresenta os cálculos efectuados (**ver notas 1 e 2**) 5
Constrói correctamente um triângulo com 6 cm^2 de área, mas em que nenhum dos lados é o segmento de recta [AB], e apresenta os cálculos efectuados **(ver notas 1 e 2)** 4
Determina correctamente a altura do triângulo pedido e apresenta os cálculos efectuados, mas não o constrói, ou constrói um triângulo que não está de acordo com o pedido **(ver nota 1)**.

Ou

Determina incorrectamente a altura do triângulo pedido, mas constrói correctamente um triângulo com a altura determinada e em que um dos lados é o segmento de recta [AB] **(ver nota 1)** 2

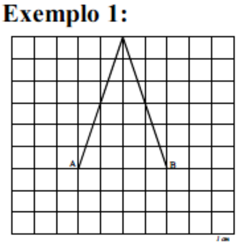
Exemplo 1:

$6 = \frac{4h}{2} \Leftrightarrow 12 = 2h \Leftrightarrow h = 6$



Dá outra resposta 0

Exemplo 1:



Notas:

1. Se houver evidência de que o examinando não recorre a material de desenho e de medição, para construir o triângulo, a sua resposta deve ser desvalorizada em 1 ponto.
2. Se o examinando não apresentar os cálculos efectuados, a sua resposta deve ser desvalorizada em 1 ponto.

Resolução proposta – 2.1

A resposta correcta é 0,2.

Seja $[A'B']$ a imagem do segmento de recta $[AB]$ pela redução de razão r.

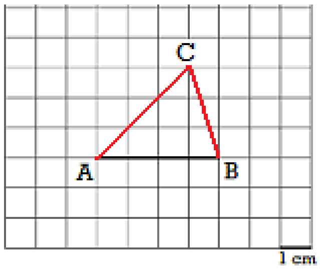
$$r = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$$

Desde o 7º ano de escolaridade que o aluno tem os conhecimentos de ampliação e redução de uma figura dada, neste caso um segmento de recta, e de razão de semelhança e a sua relação com ampliação e redução (DEB – ME, 01/02, p. 15).

Resolução proposta – 2.2

Ao calcular a área do triângulo e tomando o lado $[AB]$ como base e h a altura:

Área do triângulo é $\frac{4 \times h}{2} = 6 \Leftrightarrow 4h = 12 \Leftrightarrow h = 3$



Assim, basta construir um triângulo em que a altura em relação à base $[AB]$ tenha 3 cm como, por exemplo a figura que está em cima. "Resolver problemas que envolvam áreas de triângulos e de paralelogramos" assim como utilizar materiais de medida e desenho são conhecimentos que o aluno tem do 2º ciclo (DHGEBS – ME, 1991, p. 39).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 2.1 envolve mais do que um conhecimento do 3º ciclo, 2.2 requer a utilização de conhecimentos de grau inferior ao nível de escolaridade em presença.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo semelhantes a outros já experimentados e construção geométrica de um triângulo.

- **Tipo de resposta**

  Para o item 2.1 a resposta é única e fechada. No caso de 2.2 a resposta é não única mas do mesmo tipo – existem vários triângulos.

- **Categorização**

  O item 2.1 permite uma resposta **multi-estrutural** e 2.2 **pré-estrutural**.

Questão 3

3. O Paulo e o seu amigo João foram comprar telemóveis.

O Paulo gostou de um modelo que custava 75 euros e comprou-o com um desconto de 20%.

O João comprou um telemóvel, de um outro modelo, que só tinha 15% de desconto.

Mais tarde, descobriram que, apesar das percentagens de desconto terem sido diferentes, o valor dos dois descontos, em euros, foi igual.

Quanto teria custado o telemóvel do João sem o desconto de 15%?

Apresenta todos os cálculos que efectuares e, na tua resposta, indica a unidade monetária.

Critérios específicos de classificação:

3... 6

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Apresenta uma resolução completa e correcta e responde correctamente
(100 euros ou equivalente) **(ver nota 1)**...6

Exemplo 1:
$0{,}2 \times 75 = 15$
$\frac{100 \times 15}{15} = 100$
Teria custado 100 euros.

Exemplo 2:
$0{,}15\,x = 0{,}2 \times 75$
$x = \frac{15}{0{,}15}$
$x = 100$
Teria custado 100 euros.

Apresenta uma resolução completa e correcta, mas não responde, ou
responde incorrectamente **(ver nota 1)**..5

Exemplo 1:
$0{,}2 \times 75 = 15$
$0{,}15\,x = 15$
$x = 100$
Teria custado 85 euros.

Elabora uma estratégia completa e adequada à resolução do problema, mas não
determina correctamente o valor do desconto do telemóvel do Paulo **(ver nota 1)**.

Ou

Inicia uma estratégia adequada à resolução do problema, mas não a
completa, ou completa-a incorrectamente **(ver notas 1 e 2)**..3

Exemplo 1:
$75 \div 20 = 3{,}75$
$\frac{3{,}75}{15} = \frac{x}{100}$
$x = 25$

Exemplo 2:
$0{,}2 \times 75 = 15$
$0{,}15\,x = 15$

Exemplo 3:
$0{,}2 \times 75 = 15$
$0{,}15\,x = 15$
$x = 0{,}15 \times 15$
$x = 2{,}25$

Correctamente, calcula apenas 20% de 75 euros **(ver nota 1)**.

Ou

Responde correctamente, mas não apresenta os cálculos efectuados...1
Dá outra resposta..0

Notas:

1. Se o examinando, ao resolver o problema, obtiver descontos superiores ao preço de venda de um telemóvel e/ou preços com valores não positivos, a sua resposta deve ser desvalorizada em 2 pontos.

2. Exige-se que, no mínimo, o examinando determine correctamente o valor do desconto do telemóvel do Paulo e que evidencie compreender que, apesar das percentagens de desconto terem sido diferentes, o valor dos dois descontos, em euros, foi igual.

Resolução proposta

O telemóvel do João, sem o desconto, teria custado 100 euros.

O desconto, em euros, obtido pelo Paulo foi 0,2 × 75 = 15.

Seja x o custo do telemóvel do João, sem desconto.

Sabe-se que 15% de x é igual a 15. Então tem-se:

$$0{,}15 \times x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{0{,}15} \Leftrightarrow x = 100$$

"Resolver problemas da vida corrente que envolvam a aplicação directa de uma percentagem" é um objectivo do 2º ciclo (DHGEBS – ME, 1991, p. 37). Para além deste conhecimento o aluno deve dominar outros descritos pelos objectivos " Interpretar o enunciado de um problema", "Traduzir um problema por meio de uma equação" e "Resolver equações do 1º grau com uma incógnita, sem denominadores, utilizando as regras" (DEB – ME, 01/02, p. 27).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  De acordo com o que é referido, a questão envolve vários conhecimentos.

- **Operações envolvidas**

  Identificação da informação relevante que serve de base a raciocínios dedutivos orientadores de uma estratégia adequada à resolução do problema.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **multi-estrutural**.

Questão 4

4. B e C são duas grandezas inversamente proporcionais.

Das quatro afirmações que se seguem, apenas uma é sempre verdadeira. Qual?

☐ Se x aumenta 2 unidades, então y também aumenta 2 unidades.

☐ Se x aumenta 2 unidades, então y diminui 2 unidades.

☐ Se x aumenta para o dobro, então y também aumenta para o dobro.

☐ Se x aumenta para o dobro, então y diminui para metade.

Critérios específicos de classificação:

4. 6

Responde correctamente (Se B aumenta para o dobro, então C diminui para metade) 6

Dá outra resposta. 0

Resolução proposta

A afirmação que é sempre verdadeira é “ Se x aumenta para o dobro, então y diminui para metade”.

Falta salientar que face às alternativas x e y são positivos.

Ao aluno, e em sala de aula, deverão ser apresentados vários exemplos e trabalhadas situações de proporcionalidade inversa, extraídas da vida real como, por exemplo: comparação das medidas dos lados de rectângulos com a mesma área, para que este encare a proporcionalidade inversa como função e a reconheça nas suas diferentes representações: gráfica, analítica ou por meio de tabela, que identifique a constante e procure saber o seu significado. O estudo da proporcionalidade inversa vai permitir resolver problemas envolvendo grandezas que variam em sentido contrário – neste caso se uma grandeza aumenta para o dobro, a outra diminui para metade.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão não está interligada a uma situação em concreto. Assim, o aluno terá de a relacionar com os conhecimentos adquiridos aquando da especificação do tema “Proporcionalidade Inversa”.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo/comparativo e semelhantes a outros já experimentados.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta a esta questão é **relacional**.

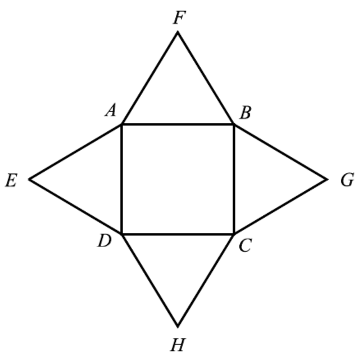
Questão 5

5. Na figura ao lado, estão representados um quadrado [ABCD] e quatro triângulos geometricamente iguais.

Em cada um destes triângulos:

• Um dos lados é também lado do quadrado;

• Os outros dois lados são geometricamente iguais.



5.1. Quantos eixos de simetria têm esta figura?
Resposta ______________________________

5.2. A figura anterior é uma planificação de um sólido.
Relativamente ao triângulo [ABF], sabe-se que:

• a altura relativa à base [AB] é 5;

• $\overline{AB} = 6$.

Qual é a **altura desse sólido**?

Começa por fazer um esboço do sólido, **a lápis**, e nele desenha o segmento de recta correspondente à sua altura. Apresenta todos os cálculos que efectuares.

Critérios específicos de classificação:

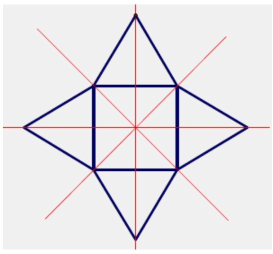
5.1. 5
A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente (A figura tem quatro eixos de simetria.)........................ 5
Dá outra resposta.. 0

5.2. 6
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Desenhar um esboço de uma pirâmide quadrangular **(ver nota 1)** 1
Desenhar, no esboço, a tracejado ou a cheio, o segmento de recta correspondente à altura da pirâmide 1
Estabelecer a igualdade $x^2 + 3^2 = 5^2$ (ou equivalente) 3
Determinar a altura da pirâmide (4) **(ver nota 2)**........................ 1

Notas:
1. Não se exige rigor no desenho do esboço, nomeadamente, que esteja desenhado em perspectiva cavaleira ou à escala, nem se exige que os segmentos invisíveis estejam a tracejado.
2. Não se exige que o examinando apresente a solução negativa da equação do 2º grau, tendo em conta o universo das soluções possíveis para o problema.

Resolução proposta – 5.1

A figura tem quatro eixos de simetria.



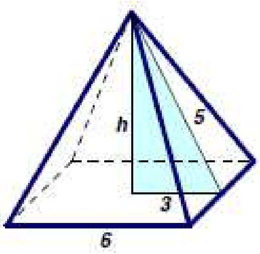
No 2º ciclo o aluno adquire o conhecimento descrito pelo objectivo "Descobrir e traçar eixos de simetria de figuras geométricas simples" (DHGEBS – ME, 1991, p. 34)

Resolução proposta – 5.2

A altura do sólido é 4 cm.

Seja *h* a altura do sólido. Recorrendo ao teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 3^2 = 5^2 \Leftrightarrow h^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow h^2 = 16 \Leftrightarrow h = \sqrt{16} \Leftrightarrow h = 4$$



Passar da planificação de um sólido que tem apenas uma base e em que as faces laterais são triângulos, para o esboço do sólido, é um conhecimento que o aluno adquire no 2º ciclo. Apenas deve ser capaz de reconhecer a altura da pirâmide quadrangular que desenhou como sendo um cateto de um triângulo rectângulo, ao qual vai aplicar o teorema de Pitágoras para determinar o valor desconhecido – a altura, mostrando dominar o conhecimento "Resolver problemas no plano e no espaço, aplicando o teorema de Pitágoras, recorrendo à calculadora sempre que aconselhável" (DEB – ME, 01/02, p. 35).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Traçar eixos de simetria numa figura simples é um conhecimento de grau inferior ao nível de escolaridade envolvido.

  Os conhecimentos adquiridos no 3º ciclo devem permitir que o aluno reconheça no interior da pirâmide que esboçou a existência de um triângulo rectângulo e partir para a aplicação do teorema.

- **Operações envolvidas**

  Utilização correcta de material de desenho (régua) e raciocínios dedutivos semelhantes a outros já experimentados (5.1) e pouco experimentados e que podem revelar-se difíceis em 5.2.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  O item 5.1 permite uma resposta ao nível **pré-estrutural** e 5.2 **multi-estrutural**.

Questão 6

6. Considera o intervalo $\left[-\pi, \frac{1}{3}\right[$.

Escreve **todos** os números inteiros relativos pertencentes a este intervalo.
Resposta ____

Critérios específicos de classificação:

6...5
A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente (- 3, - 2, – 1 e 0)..5
Responde «- 2, - 1 e 0» **ou** «- 3, -2 e - 1» 3
Dá outra resposta..0

Resolução proposta

Os números inteiros relativos pertencentes ao intervalo são: - 3, - 2, - 1 e 0.

O aluno deve fazer a representação gráfica do intervalo na recta numérica, para melhor concluir quais os números inteiros relativos que pertencem ao intervalo em que um dos extremos é um número irracional conhecido (- π) e o outro é um número racional, satisfazendo o objectivo proposto no programa do 3º ciclo do ME, 01/02, página 56 “Interpretar e representar gráfica e simbolicamente intervalos de números reais …”, já que “Comparar e ordenar números inteiros relativos” e “Representar números inteiros relativos na recta numérica” são conhecimentos do 2º ciclo, ME, página 41.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Exige-se o envolvimento de um único conhecimento que é de grau adequado ao nível de escolaridade em presença, e que é descrito no objectivo acima referido.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios simples de carácter dedutivo, semelhantes a outros já experimentados.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **uni-estrutural**.

Questão 7

7. Explica, por palavras tuas, como se deve proceder para determinar o número médio de chamadas telefónicas feitas, ontem, pelos alunos da turma do Paulo.

Critérios específicos de classificação:

7...5

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Explica como se calcula o número médio de chamadas, exprimindo-se com correcção e clareza **(ver nota)**..5

Exemplo 1:
Adiciona-se o número de chamadas feitas ontem por todos os alunos da turma e divide-se esse resultado pelo número total de alunos da turma.

Explica como se calcula o número médio de chamadas, mas não se exprime com correcção e clareza **(ver nota)**..4

Exemplo 1:
Divide-se o número total de chamadas pelos alunos.

Explica como se calcula a média aritmética de um conjunto de dados..3

Exemplo 1:
Para calcular a média, divide-se a soma de todos os dados pelo número total de dados.

Dá outra resposta..0

Exemplo 1:
Somar todas as chamadas e dividir pelo número de alunos que fizeram chamadas.

Nota:
Considera-se que o examinando se exprime com correcção e clareza quando explicita que:

- a soma de todos os dados é o número total de chamadas feitas (ontem) por todos os alunos da turma;
- o número total de dados é o número total de alunos da turma

Resolução proposta

Para determinar o número médio de chamadas telefónicas feitas, ontem, pelos alunos da turma do Paulo é necessário conhecer:

- O número total de alunos da turma;
- O número de chamadas feitas por cada um dos alunos;
- O número total de chamadas.

Por fim, divide-se o número total de chamadas pelo número de alunos, sendo o resultado o número médio de chamadas feitas por aluno.

A questão avalia mais a competência de comunicação do que propriamente os conteúdos matemáticos, embora esteja presente o conceito de número médio ou média aritmética de chamadas feitas num determinado dia pelos alunos de uma turma. Na resolução da questão o aluno tem de mostrar dominar os conhecimentos descritos pelos objectivos “Identificar e calcular a média aritmética” e “Interpretar a média aritmética num dado contexto” (DHGEBS – ME, 1991, p. 38).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Os conhecimentos exigidos são de grau inferior ao nível de escolaridade envolvido.

- **Operações envolvidas**

  São tiradas conclusões semelhantes a outras já conhecidas e descritas numa composição, onde o aluno explica os procedimentos a fazer para obter a média aritmética do número de chamadas feitas pelos alunos de uma turma.

- **Tipo de resposta**

  Por ser de comunicação, a resposta é não única mas é do mesmo tipo.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **pré-estrutural**.

Questão 8

8. Para efectuar chamadas do seu telemóvel, para duas redes (A e B), o preço, em cêntimos, que o Paulo tem a pagar por cada segundo de duração de uma chamada é o seguinte:

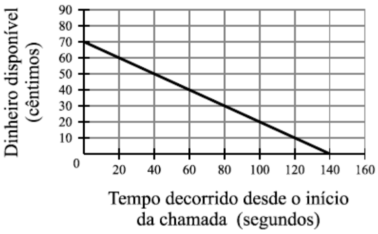
Rede	Preço por segundo (em cêntimos)
A	0,5
B	0,6

8.1. O Paulo tem 80 cêntimos disponíveis para efectuar chamadas do seu telemóvel.

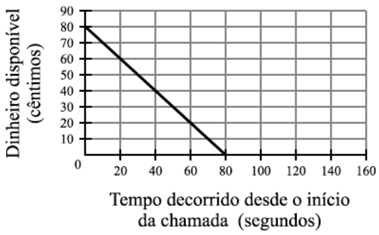
Após ter iniciado uma chamada para **a rede *A***, o dinheiro disponível foi diminuindo, até ser gasto na sua totalidade.

Qual dos quatro gráficos que se seguem representa esta situação?

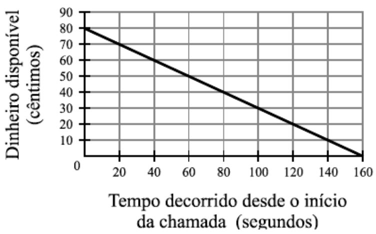
☐ Gráfico **A**



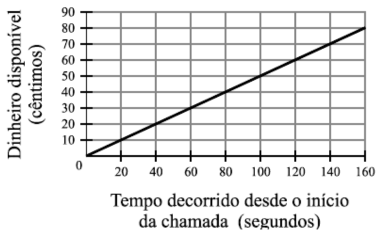
☐ Gráfico **B**



☐ Gráfico **C**



☐ Gráfico **D**



8.2. Ontem, o Paulo só efectuou chamadas do seu telemóvel para as redes A e B.
A soma dos tempos de duração dessas chamadas foi de 60 segundos e, no total, o Paulo gastou 35 cêntimos.

Qual foi o tempo total de duração das chamadas efectuadas pelo Paulo, para a rede *A*?

Apresenta todos os cálculos que efectuares e, na tua resposta, indica a unidade.

Critérios específicos de classificação:

8.1. 6
Responde correctamente (Gráfico C).. 6
Dá outra resposta.. 0

8.2. 8

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item, como por exemplo:
1.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Equacionar o problema.. 4
Resolver a equação ou o sistema **(ver nota)**.. 3
Responder ao problema (10 segundos).. 1

Nota:
O examinando pode não resolver completamente o sistema. Desde que determine correctamente o valor da variável correspondente ao tempo total de duração das chamadas efectuadas pelo Paulo para a rede A, devem ser atribuídos 3 pontos a esta etapa.

2.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Utiliza o método de tentativa e erro para encontrar os valores que satisfazem as duas condições do problema e responde correctamente (10 segundos).. 8

Exemplo 1:
$0{,}5 \times 10 = 5$
$0{,}6 \times 50 = 30$
$5 + 30 = 35$
10 segundos.

Exemplo 2:
$0{,}6 \times 50 = 30$
$35 - 30 = 5$
$5 \div 0{,}5 = 10$
10 segundos.

Utiliza o método de tentativa e erro para encontrar os valores que

satisfazem as duas condições do problema, mas não responde, ou responde incorrectamente.. 7

Exemplo 1:
$0{,}5 \times 10 = 5$
$0{,}6 \times 50 = 30$
$5 + 30 = 35$
50 segundos.

Utiliza o método de tentativa e erro para encontrar valores que satisfazem uma das condições do problema e verifica que não satisfazem a outra condição 4

Exemplo 1:
$0{,}5 \times 20 = 10$
$0{,}6 \times 40 = 24$
$10 + 24 = 34$

Exemplo 2:
$15 + 20 = 35$
$\frac{15}{0{,}5} = 30$
$\frac{20}{0{,}6} \approx 33$

Responde correctamente, mas não apresenta os cálculos efectuados 1
Dá outra resposta 0

Exemplo 1:
30 segundos para a rede A e 30 segundos para a rede B.

Resolução proposta – 8.1

O gráfico que representa a situação é o C.

O Paulo tem inicialmente 80 cêntimos e, se uma chamada para a rede A custa 0,5 cêntimos por segundo, em cada 20 segundos de conversação ele gasta 0,5 × 20, ou seja 10 cêntimos, até gastar a quantia na sua totalidade.
O aluno tem de reconhecer que à medida que o tempo de conversação aumenta, o dinheiro do Paulo diminui e que está em presença de uma função onde deve "Identificar domínio e contradomínio, reconhecendo objecto e imagem" e "Interpretar e explorar gráficos que lhe sejam fornecidos (DEB – ME, 01/02, pp. 37 e 54).

Resolução proposta – 8.2

O tempo de duração das chamadas para a rede A foi 10 segundos.

Para resolver o problema, que pode ser visto como real, o aluno tem de dominar os conhecimentos descritos pelos objectivos "Interpretar o enunciado de um problema" e "Traduzir o enunciado de um problema da linguagem corrente para a linguagem matemática" (DEB – ME, 01/02, pp. 27 e 52).
Pode ser utilizado mais do que um processo que originam a mesma resposta: uma equação com uma variável, um sistema de duas equações a duas incógnitas ou o método de tentativa e erro, como nos dão a conhecer os critérios específicos de classificação.

1º processo

Seja x o tempo gasto na rede A e (60 - x) o tempo gasto na rede B.

$$0{,}5x + 0{,}6(60 - x) = 35 \Leftrightarrow 0{,}5x + 36 - 0{,}6x = 35 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{-0{,}1} \Leftrightarrow x = 10$$

2º processo

Seja x o tempo de duração das chamadas para a rede A e y o tempo de duração das chamadas para a rede B:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 0{,}5x + 0{,}6y = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 60 - x \\ 0{,}5x + 0{,}6(60 - x) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 0{,}5 + 36 - 0{,}6x = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \begin{cases} y = 50 \\ x = 10 \end{cases}$$

3º processo - Ver 2º processo dos critérios específicos de classificação.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  De acordo com o que é exposto, na resolução de cada um dos itens são utilizados mais do que um conhecimento ao nível do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Interpretação e análise da linguagem gráfica para <u>deduzir</u> qual o gráfico que representa a situação descrita em linguagem corrente e interpretação dos dados fornecidos pelo enunciado de 8.2 para equacionar e resolver o problema.

- **Tipo de resposta**

  Para 8.1 a resposta é única e fechada. Em 8.2 a resposta é única e não fechada.

- **Categorização**

  Cada um dos dois itens permite uma resposta **multi-estrutural**.

Questão 9

9. Escreve um número, compreendido entre 5000 e 5999, que seja simultaneamente divisível por 2 e por 3.

Resposta ____

Critérios específicos de classificação:

9....5

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente...5
Escreve um número compreendido entre 5000 e 5999 e divisível por 2,
mas não divisível por 3.

Ou

Escreve um número compreendido entre 5000 e 5999 e divisível por 3,
mas não divisível por 2...1
Dá outra resposta..0

Resolução proposta

O número 5022, por exemplo.

Um número é divisível por 2 se termina em 0, 2, 4, 6 ou 8 e é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos é múltiplo de 3 ($5 + 0 + 2 + 2 = 9$).
"Utilizar critérios de divisibilidade na resolução de problemas e jogos numéricos" é um objectivo do programa do 2º ciclo, ME – 1991, página 22.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Na resolução da questão exige-se que o aluno saiba utilizar os critérios de divisibilidade por 2 e por 3, de acordo com o objectivo acima enunciado.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo, semelhantes a outros já realizados.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é não única mas do mesmo tipo.

- **Categorização**

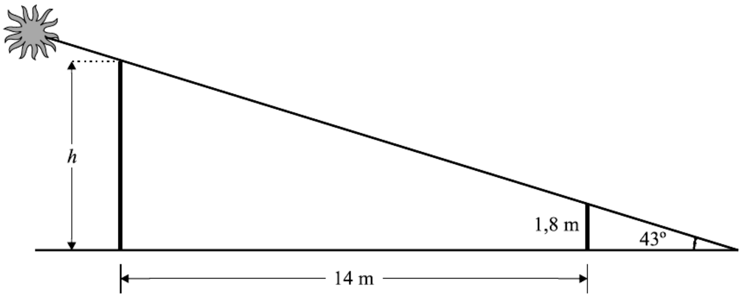
  A resposta à questão é **pré-estrutural**.

Questão 10

10. Para determinar a altura (h) de uma antena cilíndrica, o Paulo aplicou o que aprendeu nas aulas de Matemática, porque não conseguia chegar ao ponto mais alto dessa antena.

No momento em que a amplitude do ângulo que os raios solares faziam com o chão era de 43º, parte da sombra da antena estava projectada sobre um terreno irregular e, por isso, não podia ser medida.
Nesse instante, o Paulo colocou uma vara perpendicularmente ao chão, de forma que as extremidades das sombras da vara e da antena coincidissem. A vara, com 1,8 m de altura, estava a 14 m de distância da antena.

Na figura que se segue, que não está desenhada à escala, podes ver um esquema que pretende ilustrar a situação descrita.



Qual é a altura (h) da antena?

Na tua resposta, indica o resultado arredondado às unidades e a unidade de medida.

Apresenta todos os cálculos que efectuares.

Sempre que, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

Critérios específicos de classificação:

10. 7

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item, como por exemplo:
1.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

Estabelecer a igualdade $tg.43^0 = \frac{1,8}{d}$ (**ou** equivalente) 2
Determinar o valor de d 1
Estabelecer a igualdade $tg.43^0 = \frac{h}{14+d}$ (**ou** equivalente) 2
Determinar o valor de h 1
Responder, indicando a unidade de medida (15 m ou equivalente) 1

2.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

Estabelecer a igualdade $tg.43^0 = \frac{1,8}{d}$ (**ou** equivalente) 2
Determinar o valor de d 1
Estabelecer a igualdade $\frac{h}{14+d} = \frac{1,8}{d}$ (**ou** equivalente) 2
Determinar o valor de h 1

Responder, indicando a unidade de medida (15 m ou equivalente) 1

Notas:
1. Se o examinando, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos e desrespeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservar, no mínimo, duas casas decimais, a sua resposta deve ser desvalorizada em 1 ponto, a não ser que este erro ocorra apenas em etapas classificadas com zero pontos.
2. Se o examinando não efectuar os arredondamentos correctamente, a sua resposta deve ser desvalorizada em 1 ponto, a não ser que este erro ocorra apenas em etapas classificadas com zero pontos.

Resolução proposta

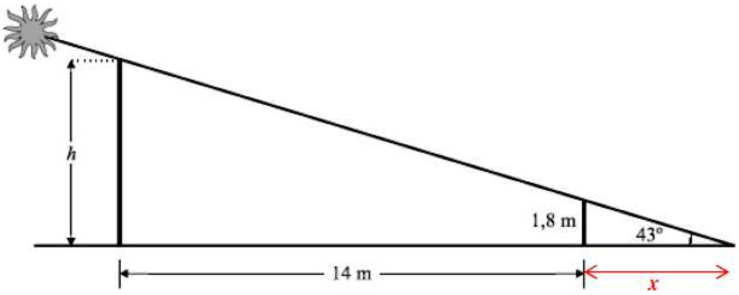
A altura da antena é, aproximadamente, 15 metros.

Leitura e interpretação do enunciado e da figura que ilustra/esquematiza o problema. A figura permite ao aluno não ter que procurar uma estratégia adequada para determinar a distância a um local inacessível – ponto mais alto da antena. Assim, este deve dominar os conhecimentos descritos pelos objectivos "Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo", aplicado ao triângulo rectângulo menor e maior e "Indicar valores aproximados de um dado número real, controlando o erro (DEB – ME, 01/02, pp.60 e 55).

São apresentados dois processos de resolução distintos:

1º processo

Seja x o comprimento da sombra projectada pela vara, conforme é indicado na figura:



(1) $tg.43^{o} = \frac{1{,}8}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1{,}8}{tg.43^{o}} \Leftrightarrow x = 1{,}93026... \approx 1{,}93$

O comprimento da sombra projectada pela antena é dado por 14+1,93 = 15,93

(2) $tg.43^{o} = \frac{h}{14+x} = \frac{h}{15{,}93} \Leftrightarrow h = tg.43^{o} \times 15{,}93 \Leftrightarrow h = 14{,}8549... \approx 15$

2º processo

Estabelece a igualdade entre as expressões (1) e (2). No fundo, cria-se uma proporção entre os lados correspondentes de rectângulos semelhantes.

$$\frac{1{,}8}{x} = \frac{h}{14+x}$$

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Está envolvido a utilização de mais de um conhecimento.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo em relação à trigonometria e à semelhança de triângulos rectângulos com um ângulo em comum.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e não fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é de nível **multi-estrutural**.

Questão 11

11. Resolve a seguinte inequação:

$$x + \frac{1-2x}{3} \leq \frac{x}{2}$$

Apresenta o conjunto solução na forma de intervalo de números reais.

Critérios específicos de classificação:

11. 8
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Desembaraçar a inequação de denominadores 2
Isolar os termos em x num dos membros da inequação 2
Obter a desigualdade $x \geq 2$ (**ou** $2 \leq x$) 2
Escrever o conjunto solução da desigualdade anterior, na forma de intervalo ($[2,+\infty[$) 2

Resolução proposta

O conjunto solução da inequação é $x \in [2,+\infty[$

$$x + \frac{1-2x}{3} \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow 6x + 2 - 4x \leq 3x \Leftrightarrow 2x - 3x \leq -2 \Leftrightarrow -x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 2$$

O aluno deve saber “Resolver inequações do 1º grau a uma incógnita” e “Identificar conjuntos definidos por uma condição…”, como é descrito no programa ME – 01/02, página 56.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Em acordo com os objectivos referidos, a questão envolve mais do que um conhecimento.

- **Operações envolvidas**

  São envolvidos raciocínios dedutivos, semelhantes a outros já muito praticados em sala de aula.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta é de nível **multi-estrutural**.

Questão 12

12. Qual dos quatro números que se seguem é o **menor**?

☐ $\left(\frac{1}{9}\right)^2$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{9}}$

☐ $\frac{\frac{1}{9}}{2}$ ☐ $\frac{2}{\frac{1}{9}}$

Critérios específicos de classificação:

12. 5

Responde correctamente $\left(\left(\frac{1}{9}\right)^2\right)$ 5

Dá outra resposta 0

Resolução proposta

O menor número é $\left(\frac{1}{9}\right)^2$

O aluno deve saber "Comparar e ordenar números racionais representados de diversas formas", "Multiplicar e dividir números racionais" (DHGEBS – ME, 1991, pp. 14 e 30) e "Determinar quadrados, cubos e valores aproximados da raiz quadrada ou da raiz cúbica usando tabelas ou a calculadora" (DEB – ME, 01/02, p. 19).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Está envolvido um único conhecimento que é de grau adequado ao nível de escolaridade em presença, já que todos os outros são de grau inferior.

- **Operações envolvidas**

  Operações no conjunto de números racionais e comparação entre os resultados.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta a esta questão é **uni-estrutural**.

Questão 13

13. Sejam A, B e C três pontos distintos de uma circunferência em que o arco AB tem 180º de amplitude.

Justifica a seguinte afirmação:

«O triângulo [ABC] não é equilátero.»

Critérios específicos de classificação:

13. 6

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Apresenta uma argumentação correcta e uma justificação completa **(ver nota)**.. 6

Exemplo 1:
O ângulo ACB está inscrito no arco AB e, por isso, tem 90° de amplitude. O triângulo $[ABC]$ não pode ser equilátero, porque os triângulos equiláteros não têm ângulos internos com 90° de amplitude.

Exemplo 2:
O arco AC tem amplitude inferior a 180°, logo as cordas $[AB]$ e $[AC]$ não têm o mesmo comprimento e, por isso, o triângulo $[ABC]$ não tem os três lados iguais.

Apresenta uma argumentação correcta e uma justificação incompleta **(ver nota)**.. 5

Exemplo 1:
O ângulo ACB está inscrito numa semicircunferência e, por isso, o triângulo $[ABC]$ é rectângulo, logo não é equilátero.

Exemplo 2:
O triângulo $[ABC]$ não tem os lados todos iguais, porque a corda $[AB]$, sendo um diâmetro da circunferência, é o maior lado do triângulo.

Apresenta uma argumentação correcta, mas não justifica a afirmação 3

Exemplo 1:
$A\hat{C}B = \frac{180°}{2} = 90°$

Exemplo 2:
O triângulo $[ABC]$ é rectângulo.

Dá outra resposta... 0

Exemplo 1:
A corda $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

Exemplo 2:
Não é equilátero, porque não tem os lados todos iguais.

Nota:
Não se exige que, na justificação apresentada, o examinando explicite uma definição de triângulo equilátero.

Resolução proposta

A afirmação é verdadeira. O triângulo [ABC] não é equilátero.

O aluno deve fazer um esboço que facilite a compreensão, conhecer a definição de ângulo inscrito num arco de circunferência e saber relacionar a amplitude do ângulo inscrito com a amplitude do arco correspondente (DEB – ME, 01/02, p. 57). A classificação de triângulos é um conhecimento do programa do 2º ciclo, 1991, página 25.

Ora, se o arco AB tem 180º de amplitude, então [AB] é um diâmetro da circunferência e o ângulo com vértice em C é um ângulo inscrito naquele arco. Logo,

$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{180º}{2} = 90º$, donde se conclui que o triângulo é rectângulo em C.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve mais do que um conhecimento.

- **Operações envolvidas**

  O aluno deve compreender a informação que lhe é dada e fazer um esboço que represente a situação para melhor deduzir que o ângulo com vértice em C está inscrito no arco AB.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

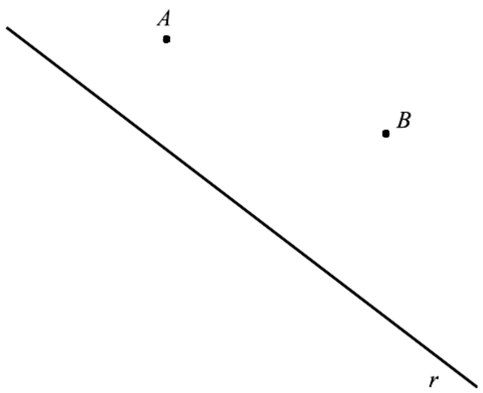
- **Categorização**

  A questão permite uma resposta de nível **multi-estrutural**.

Questão 14

14. Recorrendo a material de desenho e de medição, **constrói, a lápis**, a circunferência cujo centro é um ponto da recta r e que passa pelos pontos A e B.

Não apagues as linhas auxiliares que traçares para construíres a circunferência.



Critérios específicos de classificação:

14. 6

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Utiliza um processo correcto para encontrar o centro da circunferência
pedida e constrói-a, com rigor aproximado **(ver notas 1 e 2)** 6

Utiliza um processo correcto para encontrar o centro da circunferência
pedida, mas não a constrói, ou constrói-a, sem rigor aproximado **(ver notas 1 e 2)** 4
Constrói, com rigor aproximado, a circunferência pedida, mas não há
evidência do processo que utilizou **(ver notas 1 e 2)** 1

Dá outra resposta 0

Notas:

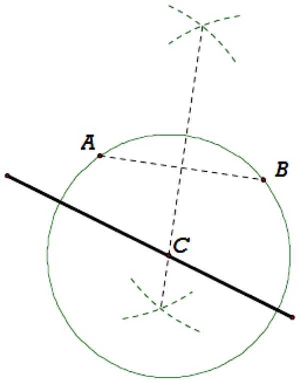
1. Se houver evidência de que o examinando, ao construir a circunferência, não utiliza o compasso, a sua resposta deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Considera-se que a construção é feita com rigor aproximado se o comprimento do raio da circunferência estiver compreendido entre 2,9 cm e 3,1 cm (inclusive).

Resolução proposta

Seja C o centro da circunferência.

Se a circunferência passa pelos pontos A e B, a distância de C a A é igual à distância de C a B, isto é $\overline{CB}$ e $\overline{CA}$ são raios da circunferência. Então, para além de pertencer à recta r o ponto C tem de pertencer à mediatriz de [AB] e é o ponto de intersecção das duas rectas.



O aluno deve fazer um esboço que facilite a compreensão do problema e dominar os conhecimentos descritos pelos objectivos "Interpretar o enunciado de um problema", "Resolver problemas, relacionando entre si propriedades das figuras geométricas", "Resolver geometricamente problemas que envolvam a noção de distância entre dois pontos", "Reconhecer que o conjunto dos pontos do plano equidistantes dos extremos de um segmento de recta é a recta perpendicular ao meio do segmento" e "Construir figuras utilizando instrumentos de medição e desenho" (DEB – ME, 01/02, pp. 42, 35, 41 e 57).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Na construção geométrica pedida estão envolvidos vários conhecimentos que o aluno tem que <u>relacionar</u>, e que são de grau adequado ao nível de escolaridade em presença.

- **Operações envolvidas**

  A par do recurso à imaginação e intuição necessárias à resolução do problema, é importante justificar os raciocínios feitos e os processos utilizados. Gradualmente os alunos apercebem-se da necessidade de provar, até mesmo aquilo que a intuição lhes sugere como verdadeiro, desenvolvendo assim em simultâneo o <u>raciocínio indutivo e dedutivo</u>.

- **Tipo de resposta**

  A conclusão é única e a resposta é fechada.

- **Categorização**

  A questão permite uma resposta **relacional**.

Quadro 5.3 - Síntese de caracterização das questões do exame nacional do 9º ano - 2007/2ª chamada

Categoria / Domínio	Pré estrutural	Uni estrutural	Multi estrutural	Relacional	Abstracto	Total de itens
Estatística e Probabilidades	7.	1.				**2**
Números e Cálculo	9.	6. 12.				**3**
Álgebra e Funções			3. 8.1 8.2 11.	4.		**5**
Geometria	2.2 5.1		2.1 5.2 10 13.	14.		**7**
Total de itens	**4**	**3**	**8**	**2**	**0**	**17**

Todos os itens têm resposta de categoria bem definida.

A prova valoriza a Geometria e itens de quatro categorias, em que a relacional se apresenta em duas questões, uma que diz respeito a «Proporcionalidade inversa» e outra a um problema do tema «Lugares Geométricos».

Nota-se, mais uma vez, incidência em itens de resposta multi-estrutural.

Prova 23 / 1ª Chamada / 2008

Questão 1

1. O João foi ao cinema com os amigos.

Comprou os bilhetes com os números 5, 6, 7, 8, …, 17, da fila *S*, isto é, todos os números entre 5 e 17, inclusive.

O João tirou, aleatoriamente, um bilhete para ele, antes de distribuir os restantes pelos amigos.

Qual é a probabilidade de o João ter tirado para ele um bilhete com um número par?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{6}{13}$ ☐ $\frac{7}{13}$ ☐ $\frac{13}{7}$

Critérios específicos de classificação:

1.. ....**5 pontos**

Alternativa correcta $\left(\frac{6}{13}\right)$ 5

Resolução proposta

A resposta é $\frac{6}{13}$

Antes de colocar «X» no quadrado correspondente à alternativa que considera correcta, o aluno deve completar a sequência de números entre 5 e 17, inclusive, contar quantos desses números são pares e pôr em prática o conhecimento descrito pelo objectivo "Calcular, em casos simples, a probabilidade de um acontecimento como quociente entre número de casos favoráveis e número de casos possíveis" (DEB – ME, 2001/02, p. 51). Existem seis números pares (6, 8, 10, 12, 14, 16) no total de treze bilhetes comprados.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A resolução da questão envolve o domínio de um único conhecimento – probabilidade de um acontecimento – tema do 9º ano de escolaridade.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio simples de carácter dedutivo e muito experimentado em aula.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **uni-estrutural**.

Questão 2

2. Qual é o mínimo múltiplo comum entre 12 e 24?

☐ $2^2 \times 3$ ☐ $2^3 \times 3$ ☐ $2^5 \times 3^2$ ☐ $2^6 \times 3^2$

Critérios específicos de classificação:

2...**5 pontos**

Alternativa correcta ($2^3 \times 3$)..5

Resolução proposta

A resposta correcta é $2^3 \times 3$.

De acordo com o programa do 2º ciclo (DHGEBS – ME, 1991) no final do 6º ano de escolaridade os alunos dominam, entre outros, os conhecimentos de potência de expoente natural, múltiplo e divisor de um número (p. 22).

$M_{12} = \{0, 12, \mathbf{24}, 36, 48, \ldots\}$ $M_{24} = \{0, \mathbf{24}, 48, \ldots\}$

O mínimo múltiplo comum entre 12 e 24 é 24. $2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$

Mas, se o aluno "Indicar o m.d.c. e m.m.c. entre dois números", utiliza um conhecimento do 3º ciclo, página 38.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Pelo exposto anteriormente a questão requer conhecimentos de grau inferior ao nível de escolaridade em presença ou um único conhecimento do 3º ciclo, não sendo necessário identificar informação relevante no enunciado, pois este resume-se a uma simples, curta e directa pergunta.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio simples que apela às definições de múltiplo de um número e de menor múltiplo comum entre dois números.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta é de nível **pré-estrutural** (2.a) ou uni-estrutural (2.b).

Questão 3

3. Numa sala de cinema, a primeira fila tem 23 cadeiras.
A segunda fila tem menos 3 cadeiras do que a primeira fila.
A terceira fila tem menos 3 cadeiras do que a segunda e assim, sucessivamente, até à última fila, que tem 8 cadeiras.

Quantas **filas** de cadeiras tem a sala de cinema?

Explica como chegaste à tua resposta.

Critérios específicos de classificação:

3... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Apresenta uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema e responde 6 filas...5

Exemplo 1

23; 20; 17; 14; 11; 8

6 filas

Exemplo 2

$23 - 3n = 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3n = 8 - 23 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3n = -15 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = 5$
$5 + 1 = 6$
O cinema tem 6 filas

Exemplo 3

$23 - 3(n-1) = 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 23 - 3n + 3 = 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 26 - 3n = 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3n = 8 - 26 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3n = -18 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = 6$
O cinema tem 6 filas

Apresenta uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas não contabiliza as 6 filas ou apenas contabiliza 5 filas..4

Exemplo 1

23; 20; 17; 14; 11; 8

Exemplo 2

20; 17; 14; 11; 8
O cinema tem 5 filas

Exemplo 3

$23 - 3n = 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3n = 8 - 23 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3n = -15 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = 5$
O cinema tem 5 filas

Inicia uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas não a completa.

Por exemplo, escreve alguns números possíveis de cadeiras para as filas 3
Responde 6 filas, sem apresentar explicação 1

Resolução proposta

A sala de cinema tem seis filas de cadeiras.

Para responder à questão, o aluno tem de ter em atenção toda a informação dada no enunciado e definir uma estratégia de resolução que poderá ser muito simples e, até ao nível do 1º ciclo do ensino básico.

1ª fila – 23	4ª fila – 17 – 3 = 14
2ª fila – 23 – 3 = 20	5ª fila – 14 – 3 =11
3ª fila – 20 – 3 = 17	6ª fila – 11 – 3 = 8

No 8º ano de escolaridade o aluno tem a oportunidade de resolver actividades e problemas que lhe permitem um melhor conhecimento dos números, relacionando-os através das suas propriedades e descobrir novas relações como, por exemplo, sequências de números. Uma outra estratégia para resolver esta questão será por construção do termo geral de uma sequência resolução esta que se revela, logo à partida, muito mais complicada!

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A resolução proposta envolve conhecimento que é do senso comum embora esteja, de certa forma, ligado ao conhecimento matemático e é de grau inferior ao nível do 3º ciclo do ensino básico.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio muito elementar que envolve subtracções sucessivas de três unidades ao número encontrado anteriormente, a começar em 23 e a terminar em 8.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **pré-estrutural**.

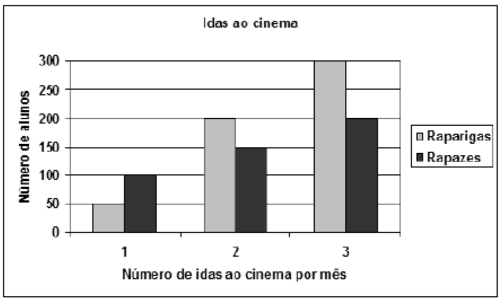
Questão 4

4. Numa escola com 1000 alunos, fez-se um estudo sobre o número de vezes que, em média, as raparigas e os rapazes da escola iam ao cinema por mês.
Com os dados recolhidos construiu-se a tabela que se segue.

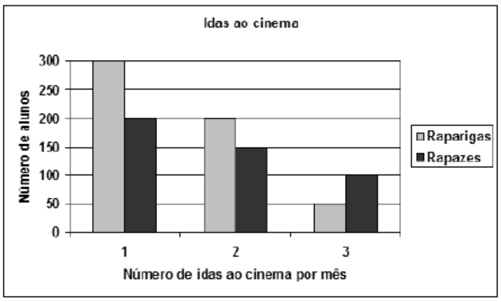
	Número de idas ao cinema por mês		
	1 vez	**2 vezes**	**3 vezes**
Raparigas	200	150	100
Rapazes	300	200	50

4.1. Qual dos gráficos que se seguem representa os dados da tabela?

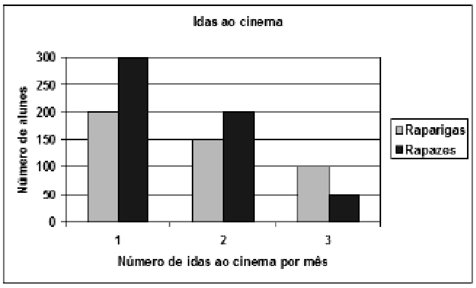
☐ Gráfico A



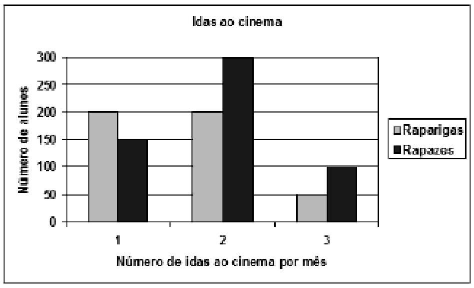
☐ Gráfico B



☐ Gráfico C



☐ Gráfico D



4.2. Vai sortear-se um bilhete de cinema entre todos os alunos da escola.

Qual é a probabilidade de o bilhete sair a uma rapariga que, em média, vai ao cinema **mais do que uma vez** por mês?

Apresenta o resultado na forma de fracção irredutível.

Resposta: ____

Critérios específicos de classificação:

4.1. .... **5 pontos**
Alternativa correcta (Gráfico C) 5

4.2. .... **5 pontos**
A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente $\frac{1}{4}$ 5
Responde na forma de fracção não irredutível equivalente a $\frac{1}{4}$ 4
Responde apresentando uma fracção com numerador pertencente a]0,1000[
e denominador igual a 1000 2
Responde apresentando uma fracção com numerador igual a 250 e
denominador igual a 450 2

Resolução proposta – 4.1

O gráfico C é a resposta correcta.

De entre os quatro gráficos, C é o único gráfico de barras que representa exactamente a informação dada na tabela. A variável estatística “Número de idas ao cinema por mês” toma os valores 1, 2 e 3 e para cada um dos sexos existe uma barra de cor distinta, em que a sua altura representa o número de alunos que foram, respectivamente, uma duas ou três vezes.

No âmbito da Estatística fazer a representação de informação em tabelas e gráficos de barras é um tema que consta do programa do 2º ciclo (DHGEBS – ME, 1991), bem como o domínio dos conhecimentos “Ler e interpretar informação contida em tabelas ou gráficos”, “Fazer conjecturas a partir da interpretação da informação” e “Construir gráficos de barras a partir de dados fornecidos” (p. 38).

Resolução proposta – 4.2

A resposta correcta é $\frac{1}{4}$.

A escola tem 1000 alunos. O número de raparigas que, em média, vai ao cinema mais do que uma vez por mês é 150 + 100 = 250.

Então, pelo conhecimento descrito pelo objectivo do Programa do 3º ciclo (DEB – ME, p.51) “Calcular, em casos simples, a probabilidade de um acontecimento como quociente entre número de casos favoráveis e número de casos possíveis”, a probabilidade é $\frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 4.1 envolve conhecimentos de grau inferior ao nível do 3º ciclo.

  O item 4.2 requer a aplicação da definição de probabilidade, conhecimento adquirido no 9º ano. Dar a resposta sob a forma de fracção irredutível é um objectivo do programa do 2º ciclo, 1991, p. 22 - “Escrever fracções equivalentes a uma fracção dada”.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios simples de carácter dedutivo e idênticos a outros já muito experimentados em sala de aula.

- **Tipo de resposta**

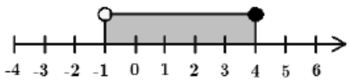
  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  O item 4.1 permite uma resposta **pré-estrutural** e o item 4.2 **uni-estrutural**.

Questão 5

5. Considera a seguinte representação gráfica de um intervalo de números reais.



Qual dos seguintes conjuntos define este intervalo?

- □ $\{x \in \mathbb{R}: \ x \geq -1 \wedge x < 4\}$
- □ $\{x \in \mathbb{R}: \ x > -1 \wedge x \leq 4\}$
- □ $\{x \in \mathbb{R}: \ x \geq -1 \vee x < 4\}$
- □ $\{x \in \mathbb{R}: \ x > -1 \vee x \leq 4\}$

Critérios específicos de classificação:

5....**5 pontos**

Alternativa correcta $\{\ x \in R : x > -1 \ \wedge \ \ x \leq -4\ \}$..5

Resolução proposta

A alternativa correcta é $\{\ x \in R : x > -1 \ \wedge \ \ x \leq -4\ \}$

Para chegar à resposta correcta, o aluno apenas tem de traduzir a representação gráfica do intervalo de números reais]– 1 , 4] sob a forma de conjunto, por aplicação do conhecimento descrito pelo objectivo “Interpretar e representar gráfica e simbolicamente, intervalos de números reais, assim como intersecção e reunião de intervalos” (DEB – ME, 2001/02, p. 56).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Domínio de um único conhecimento descrito pelo objectivo acima referido.

- **Operações envolvidas**

  Interpretação e tradução de uma representação gráfica para uma representação simbólica de um intervalo de números reais, operação exercitada em sala de aula quando se utilizam a intersecção e reunião de intervalos ligados à conjunção e disjunção de condições com o apoio gráfico.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **uni-estrutural**.

Questão 6

6. Uma Associação de Estudantes vai organizar uma festa num recinto fechado e resolveu, por questões de segurança, que o número de bilhetes a imprimir deveria ser **menos 20% do que o número máximo** de pessoas que cabem no recinto.

6.1. A Associação de Estudantes decidiu organizar a festa no ginásio da escola onde cabem, no máximo, 300 pessoas.

Quantos bilhetes deve a Associação de Estudantes mandar imprimir?

Apresenta os cálculos que efectuares.
Resposta: ____

6.2. Sendo *n* o número máximo de pessoas que cabem num recinto fechado, qual das seguintes expressões permite à Associação de Estudantes calcular o número de bilhetes a imprimir?

☐ $n - 0{,}8$ ☐ $n \times 0{,}2$ ☐ $n - 0{,}2$ ☐ $n \times 0{,}8$

Critérios específicos de classificação:

6.1. ....**5 pontos**
Determinar 20% de 300...3
Concluir que se mandam imprimir 240 bilhetes 2

6.2. ....**5 pontos**
Alternativa correcta ($n \times 0{,}8$)..5

Resolução proposta – 6.1

A Associação de estudantes deve mandar imprimir 240 bilhetes.

Nesta questão, que pode ser considerada como um problema da vida real, o aluno tem de identificar a informação relevante que faz parte do enunciado e deduzir que o número de bilhetes a imprimir deve ser 100% – 20% = 80% de 300, que é o número máximo de pessoas que podem estar no ginásio.
$300 \times 0{,}80 = 240$ ou $300 \times 0{,}20 = 60$ e $300 - 60 = 240$

Ora, este conhecimento faz parte do programa do 2º ciclo e está definido no objectivo programático “Resolver problemas da vida corrente que envolvam a aplicação directa de uma percentagem” (DHGEBS – ME, 1991, p. 37).

Resolução proposta – 6.2

A resposta correcta é $n \times 0{,}8$.

Se n é o número máximo de pessoas que cabem num recinto fechado e por questões de segurança o número de bilhetes a imprimir deve ser, tal como foi feito anteriormente 80% de n, então a expressão é $n \times 0{,}80$, isto é $n \times 0{,}8$.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A procura da resposta aos dois itens exige a aplicação do conhecimento descrito pelo objectivo acima referido.

- **Operações envolvidas**

  Solicitam-se raciocínios simples e de grau inferior ao nível de escolaridade em apreço.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  Cada um dos itens permite uma resposta de nível **pré-estrutural**.

Questão 7

7. O aparelho de ar condicionado de uma sala de cinema teve uma avaria durante a exibição de um filme.
A temperatura, C, da sala, t horas após a avaria e até ao final do filme, pode ser dada, aproximadamente, pela expressão:

$C = 21 + 2t$, com C expresso em graus centígrados e t expresso em horas.

7.1. Na sala, qual era a temperatura, em graus centígrados, uma hora após a avaria?

Resposta: ____

7.2. Qual foi, na sala, o aumento da temperatura por hora, em graus centígrados?

Explica como chegaste à tua resposta.

7.3. No final do filme, a temperatura na sala era de 24 graus centígrados.

Há quanto tempo tinha ocorrido a avaria?

Apresenta os cálculos que efectuares e, na tua resposta, apresenta o resultado **em minutos.**

Critérios específicos de classificação:

7.1. .... **5 pontos**

Responde 23 ou 23º C.. 5
Dá outra resposta.. 0

7.2. .... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Apresenta uma estratégia apropriada de resolução do problema ou uma justificação válida e responde 2 ou 2 ºC 5

Exemplo 1	Exemplo 2	Exemplo 3
$21 + 2 \times 2 = 25$ $25 - 23 = 2$ Resposta: $2\ ^{\circ}\mathrm{C}$	$2 \times 1 = 2$ $2 \times 2 = 4$ $\quad 4 - 2 = 2$ Resposta: 2°	2, porque é a diferença entre as temperaturas registadas em duas horas consecutivas

Apresenta uma estratégia parcialmente correcta de resolução do problema e responde 2 ou 2 ºC.. 3

Exemplo 1	Exemplo 2
2°, porque é o valor que está a multiplicar pelo tempo (t).	2, porque vi na fórmula.

Responde 2 ou 2 ºC, sem apresentar uma justificação ou a estratégia seguida.............. 1

7.3. .... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Apresenta uma estratégia apropriada de resolução do problema e responde 90 minutos (**ver nota**).. 5
Apresenta uma estratégia apropriada de resolução do problema e responde 1,5 ou 1,5 horas 4
Inicia uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas não a completa.............. 3
Exemplo: $21 + 2t = 24$ ou outra equação ou justificação equivalente.

Responde 90 minutos, sem apresentar a estratégia seguida 2
Responde 1,5 ou 1,5 horas, sem apresentar a estratégia seguida 1

Nota:

Se o examinando apresentar uma estratégia correcta a partir de um valor incorrecto, obtido em **7.1.** ou **7.2.**, não devem ser atribuídas desvalorizações.

Resolução proposta – 7.1

Uma hora após a avaria a temperatura na sala era 23ºC.

O conhecimento descrito pelo objectivo "Dar exemplos de correspondências na Matemática ou em situações da vida real, identificando as que são funções" (DEB – ME, 2001/02, p. 37) deve ser adquirido pelo aluno, utilizado e aprofundado ao longo do 3º ciclo.
A questão dá a expressão analítica de uma função onde *c*, a temperatura em graus centígrados depende de t, tempo em horas. Utilizando a expressão analítica da função para $t = 1$, $c = 21 + 2 \times 1 = 23$.

Resolução proposta – 7.2

Na sala o aumento da temperatura por hora foi de 2ºC.

$25 – 23 = 2$ e $23 – 21 = 2$, pelo que o aumento da temperatura é 2ºC.

Resolução proposta – 7.3

A avaria tinha ocorrido há 1h e 30 minutos, isto é, 90 minutos.

O raciocínio que o aluno possa ter feito em 7.2, leva-o a concluir que a temperatura aumenta 2ºC em cada hora que passa e, portanto, 1ºC a cada meia hora. Para atingir 24ºC no final do filme é porque tinha passado 1 hora e meia após o seu início.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Nesta questão e para os três itens, exige-se o domínio de um único conhecimento descrito no objectivo atrás referido.

- **Operações envolvidas**

  Interpretação de um fenómeno da vida real através da sua descrição por uma expressão analítica que se utiliza em raciocínios dedutivos para construir a resposta a cada um dos itens.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  Cada um dos itens permite uma resposta **uni-estrutural**.

Questão 8

8. Considera as funções definidas por:

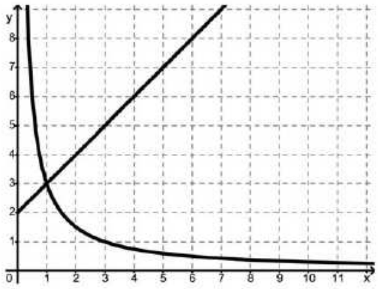
$$y = x + 2 \quad \text{para} \quad x \geq 0$$

e

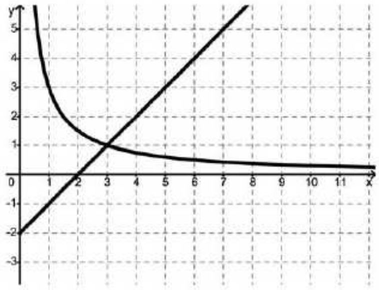
$$y = \frac{3}{x} \quad \text{para} \quad x > 0$$

Em qual dos seguintes referenciais estão os gráficos das duas funções?

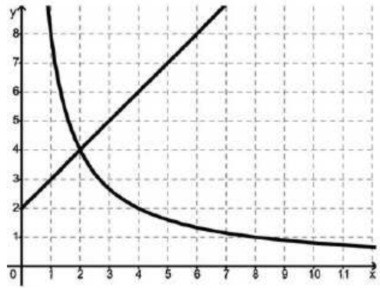
☐ Referencial A



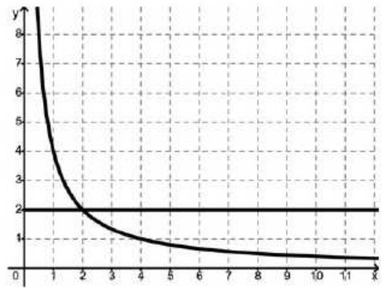
☐ Referencial B



☐ Referencial C



☐ Referencial D



Critérios específicos de classificação:

8... **5 pontos**

Alternativa correcta (Referencial A)..5

Resolução proposta

A resposta correcta é referencial A.

A função $y = x + 2$ representa-se graficamente por uma recta que passa no ponto (0, 2). A função $y = \frac{3}{x}$ representa-se graficamente por um ramo de hipérbole em que o produto das duas coordenadas de cada um dos seus pontos é 3.

O aluno deve “Reconhecer situações de proporcionalidade inversa, indicando a constante de proporcionalidade” e “Ler, interpretar e construir tabelas e gráficos relativos a funções do tipo $y = kx$ e $y = kx + b$” (DEB – ME, 2001/02, p. 37) para que relacione k com a inclinação da recta, conheça o significado de b e relacione estes gráficos com os de proporcionalidade directa.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve mais do que um conhecimento descrito pelos objectivos específicos do programa do 3º ciclo, e utilizados de forma isolada.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios dedutivos similares a outros já experimentados.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta a esta questão é **multi-estrutural**.

Questão 9

9. Resolve a equação seguinte:

$$2\left(x^2-1\right)=3x$$

Apresenta os cálculos que efectuares.

Critérios específicos de classificação:

9...**6 pontos**

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item, como, por exemplo:
1.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Desembaraçar a equação de parênteses 2
Substituir correctamente, na fórmula resolvente, *a*, *b* e *c* pelos respectivos valores (**ver nota 1**).. 2
Determinar as duas soluções da equação (–0,5 ou fracção equivalente e 2) (**ver nota 2**).. 2

Nota 1:
Se o examinando substituir correctamente, na fórmula resolvente, apenas os valores de dois coeficientes, nesta etapa deve ser atribuído 1 ponto.

Nota 2:
Se o examinando escrever apenas uma das soluções da equação, nesta etapa deve ser atribuído 1 ponto.

2.º Processo

A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Verificar que –0,5 é solução.. 2
Verificar que 2 é solução.. 2
Referir que uma equação do 2.º grau não tem mais do que duas soluções.. 2

Resolução proposta

A resposta correcta é $x=-\frac{1}{2}\vee x=2$.

<u>1º processo</u>

$$2\left(x^2-1\right)=3x\Leftrightarrow 2x^2-2-3x=0$$

a = 2, b = - 2, c = - 3 $\qquad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 2\times(-3)}}{2\times 2}\Leftrightarrow ...x=-\frac{1}{2}\vee x=2$

Para além de desembaraçar a equação de parênteses e colocá-la na forma $ax^2 + bx + c = 0$, há que saber "Resolver equações do 2º grau, procurando utilizar o processo mais adequado a cada situação" (DEB – ME, p. 59), neste caso através da fórmula resolvente que faz parte do formulário anexo à prova de exame.

2º processo

Por tentativa verificar que – 0,5 e 2 são as soluções da equação, utilizando os conhecimentos «uma equação do 2º grau pode ter, no máximo, duas raízes ou soluções reais» e o descrito pelo objectivo "Determinar valores numéricos de uma expressão com variáveis" (DEB – ME, 01/02, p. 23).

$$2\left(x^2 - 1\right) = 3x$$

se $x = -0{,}5$ $\quad 2\times((-0{,}5)^2 - 1) = -1{,}5$ $\quad$ e $\quad 3\times(-0{,}5) = -1{,}5$

se $x = 2$ $\quad 2\times(2^2 - 1) = 6$ $\quad$ e $\quad 3\times 2 = 6$

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A resolução da questão envolve mais do que um conhecimento para qualquer um dos processos.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios dedutivos semelhantes a outros já feitos.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e não fechada.

- **Categorização**

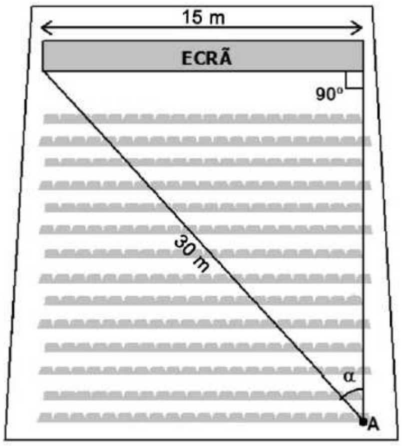
  A resposta à questão é de nível **multi-estrutural**.

Questão 10

10. A figura representa uma sala de cinema. O João sentou-se no último lugar da última fila, assinalado, na figura, pelo ponto **A**. O ângulo de vértice **A** é o seu ângulo de visão para o ecrã.

No cinema, as pessoas que se sentam no lugar em que o João está sentado devem ter um ângulo de visão de, **pelo menos, 26º**, sendo o ideal 36º, para que possam ter uma visão clara do filme.

Tendo em atenção as medidas indicadas na figura, determina a amplitude do ângulo de visão do lugar do João.
Na tua resposta, apresenta os cálculos que efectuares e explica se a amplitude obtida permite uma visão clara do filme.



Critérios específicos de classificação:

10...**6 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

Estabelecer a igualdade sen $\alpha = \frac{15}{30}$ 2

Determinar $\alpha = 30^0$ 2

Justificar que a amplitude do ângulo *α* se encontra dentro do intervalo de valores
que permite uma visão clara do filme 2

Resolução proposta

A amplitude do ângulo de visão do lugar do João é 30 sendo o ideal 36º, o que permite uma visão clara do filme.

$$sen.\alpha = \frac{15}{30} \Leftrightarrow sen.\alpha = 0{,}5 \Leftrightarrow \alpha = sen^{-1}(0{,}5) \Leftrightarrow \alpha = 30^{o}$$

As noções básicas de Trigonometria devem partir de situações concretas, como é o caso. “Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo” e “Determinar um ângulo agudo conhecida uma das suas razões trigonométricas, utilizando a tabela trigonométrica ou a calculadora” são objectivos do programa, página 60, e descrevem conhecimentos que devem estar na posse do aluno.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A produção da resposta envolve mais do que um conhecimento específico.

- **Operações envolvidas**

  Através de raciocínios simples e num triângulo rectângulo, o aluno deve saber encontrar/deduzir as funções trigonométricas de um ângulo agudo e aplicá-las a uma situação concreta, assim como saber relacioná-las com as funções trigonométricas inversas.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

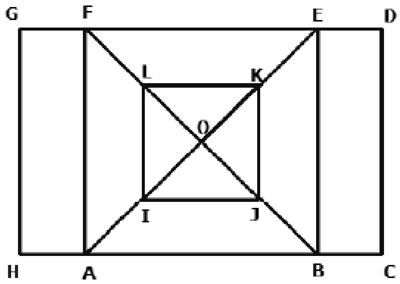
- **Categorização**

  A resposta a esta questão é **multi-estrutural**.

Questão 11

11. Na figura que se segue, os vértices do quadrado [IJKL] são os pontos médios das semi diagonais do quadrado [ABEF].
A intersecção das diagonais dos dois quadrados é o ponto O.

Os lados [CD] e [HG] do rectângulo [HCDG] são paralelos aos lados [BE] e [AF] do quadrado [ABEF] e [CD] mede o triplo de [BC].



11.1. Qual é a amplitude do ângulo EAB?

$E\hat{A}B =$ ____º

11.2. Sabendo que a medida da área do quadrado [ABEF] é 64, calcula a medida do comprimento do segmento de recta [OB].
Na tua resposta, escreve o resultado arredondado às décimas.
Apresenta os cálculos que efectuares.

11.3. Em relação à figura, qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

- ☐ O triângulo $[AOB]$ é escaleno.
- ☐ O triângulo $[AOB]$ é acutângulo.
- ☐ O trapézio $[ACDE]$ é isósceles.
- ☐ O trapézio $[ACDE]$ é rectângulo.

Critérios específicos de classificação:

11.1. .... **6 pontos**
Responde correctamente (45º) 6
Dá outra resposta 0

11.2. .... **6 pontos**

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item, como, por exemplo:
1.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Determinar o comprimento do lado do quadrado [ABEF] (8).. 2
Estabelecer uma igualdade que traduza a aplicação do Teorema de Pitágoras
ao triângulo [ABF] 2

Determinar $\overline{OB}$ (5,7) (**ver nota**) 2

2.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Estabelecer correctamente a relação entre a área do quadrado [ABEF]
e a do triângulo [ABF] (32) 1
Estabelecer correctamente a relação entre a área do triângulo [ABF]
e a do triângulo [ABO] (16).. 1
Escrever a igualdade entre a área do triângulo [ABO] e 16 2

Determinar $\overline{OB}$ (5,7) (**ver nota**).................................... 2

Nota:
Se o examinando escrever o resultado mal arredondado, esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

11.3... **5 pontos**
Alternativa correcta (O trapézio [ACDE] é rectângulo)................................ 5

Resolução proposta – 11.1

A amplitude do ângulo EAB é 45.

O aluno detém os conhecimentos descritos pelos objectivos do 2º ciclo "Classificar triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados, a partir de medidas dadas ou determinadas pelos alunos" e "Descobrir experimentalmente o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo" (DHGEBS – ME, 1991, p. 25).
Como [ABEF] é um quadrado, o triângulo [EAB] é rectângulo e isósceles. Se tem dois lados iguais também tem dois ângulos iguais, sendo que cada um deles tem 45º para que a soma dos três ângulos internos do triângulo seja 180º.

Resolução proposta – 11.2

A medida do comprimento de [EB] é, aproximadamente, 5,7.

O aluno deve saber relacionar entre si as figuras obtidas por decomposição de um polígono em triângulos, "Resolver problemas, no plano e no espaço, aplicando o teorema de Pitágoras, recorrendo à calculadora sempre que aconselhável" e "Indicar valores aproximados de um número real, controlando o erro" (DEB – ME, 01/02, pp. 35 e 55).
1º processo
A área do quadrado [ABEF] é 64, logo o seu lado é 8. Assim, $\overline{AB} = \overline{FA} = 8$ e o triângulo [FAB] é rectângulo em A. Pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{FB}^2 = 8^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{FB}^2 = 128 \Leftrightarrow \overline{FB} = \sqrt{128} \quad \text{e} \quad \overline{OB} = \overline{FB}/2 \Leftrightarrow \overline{OB} = \sqrt{128}/2 \approx 5{,}7$$

2º processo
Os segmentos [FB] e [AE] são eixos de simetria do quadrado [ABEF], cruzam-se no seu centro e dividem o quadrado em quatro triângulos rectângulos e isósceles iguais. Assim, a área do triângulo [ABO] de base $\overline{OB} = \overline{OA}$ é um quarto da área do quadrado, ou seja 64/4 = 16.

Seja $x = \overline{OB}$ $A_{\text{Triângulo}} = \dfrac{x \times x}{2} = 16 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2} = 16 \Leftrightarrow x^2 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt{32} = 5{,}656... \approx 5{,}7$

Resolução proposta – 11.3

A afirmação verdadeira é “O trapézio [ACDE] é rectângulo”

“Classificar triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados, a partir de medidas dadas ou determinadas pelos alunos e “ Classificar e descrever quadriláteros” são conhecimentos do 2º ciclo, ME – 1991, páginas 25 e 36.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Qualquer um dos três itens envolve mais do que um conhecimento. Em 11.1 e 11.3 estes estão ao nível do 2º Ciclo e em 11.2 evidencia-se a presença de pelo menos um conhecimento do 3º Ciclo do Ensino Básico.

- **Operações envolvidas**

  Interpretação e análise da figura, acompanhada de raciocínios dedutivos semelhantes a outros já experimentados.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas em 11.1 e 11.3. Para 11.2 a resposta é única e não fechada.

- **Categorização**

  Cada um dos itens 11.1 e 11.3 permite uma resposta **pré-estrutural**. A resposta ao item 11.2 é **multi-estrutural** ou uni-estrutural se seguir o 2º processo.

<u>Questão 12</u>

12. Na **figura 1**, podes observar um pacote de pipocas cujo modelo geométrico é um tronco de pirâmide, de bases quadradas e paralelas, representado a sombreado na **figura 2**.

A pirâmide de base [ABCD] e vértice I, da figura 2, é quadrangular regular.

Fig. 1

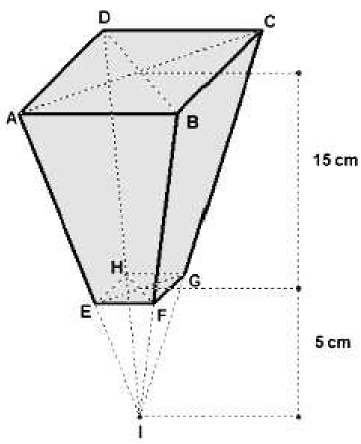


Fig. 2

12.1. Em relação à **figura 2**, qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

- [ ] A recta DH é paralela ao plano que contém a face [ABFE].
- [ ] A recta CG é oblíqua ao plano que contém a face [ABFE].
- [ ] A recta CB é perpendicular ao plano que contém a face [ABFE].
- [ ] A recta HG é concorrente com o plano que contém a face [ABFE].

12.2. Determina o volume do tronco de pirâmide representado na **figura 2**, sabendo que:

$$\overline{AB} = 12\,\text{cm}$$
$$\overline{EF} = 3\,\text{cm}$$

e que a altura da pirâmide de base [ABCD] e vértice I é 20 cm.

Apresenta todos os cálculos que efectuares e, na tua resposta, escreve a unidade de medida.

Critérios específicos de classificação:

12.1. …..**5 pontos**

Alternativa correcta (A recta CG é oblíqua ao plano que contém a face [ABFE]..5

12.2.... **6 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Determina correctamente o volume pedido (945 cm^3) e apresenta os cálculos efectuados 6

Apresenta uma resolução em que revela compreender que o volume pedido corresponde à diferença do volume de duas pirâmides, ou a um tronco de pirâmide, mas não substitui correctamente um dos valores na(s) fórmula(s)...........5

Determina correctamente o volume das duas pirâmides e apresenta os cálculos 3

Exemplo 1	**Exemplo 2**
$V = \frac{12\times12\times20}{3} = 960$	$V = \frac{12\times12\times20}{3} = 960$
$V = \frac{3\times3\times5}{3} = 15$	$V = \frac{3\times3\times5}{3} = 15$
$960 + 15 = 975\ \text{cm}^3$	

Determina correctamente o volume de uma das pirâmides e apresenta os cálculos..........2

Determina correctamente (945 cm^3) mas não apresenta os cálculos 1

Resolução proposta – 12.1

A afirmação verdadeira é "A recta CG é oblíqua ao plano que contém a face [ABFE]

Para responder à questão, o aluno deve dominar o conhecimento descrito pelo objectivo "Identificar, em modelos concretos, rectas e planos em várias posições relativas" (DEB – ME, 01/02, p. 61).

Resolução proposta – 12.2

$V_{\text{pirâmide [ABCDI]}} = \left(12^2 \times 20\right)/3 = 960\,\text{cm}^3$

$V_{\text{pirâmide [EHFGI]}} = \left(3^2 \times 5\right)/3 = 15\ \text{cm}^3$

$V_{\text{tronco}} = 960 - 15 = 945\ \text{cm}^3$.

A questão exige a visualização a três dimensões, algum grau de abstracção ao comparar as figuras com uma situação real, a compreensão e a utilização correcta dos dados fornecidos pelo enunciado, bem como saber interpretar a figura que representa o modelo geométrico do tronco de pirâmide, à qual se assemelha o pacote de pipocas e ter a destreza de <u>deduzir</u> que o volume a sombreado é a diferença entre os volumes das pirâmides [ABCDI] e [EFGHI], pondo à prova que sabe “ Determinar áreas e volumes de sólidos e de objectos da vida real” (DEB – ME, 01/02, p. 26), fazendo uso da fórmula da área do quadrado que conhece do 2º ciclo de estudos e da fórmula do volume da pirâmide que se encontra no formulário anexo à prova de exame.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 12.1 envolve um único conhecimento descrito pelo objectivo atrás referido e 12.2 exige a utilização de mais do que um conhecimento.

- **Operações envolvidas**

  Observação do sólido representado na figura, percepção do espaço e raciocínios dedutivos sobre a figura no sentido de tirar as conclusões necessárias à resolução do problema.

- **Tipo de resposta**

  As conclusões são únicas e as respostas são fechadas.

- **Categorização**

  O item 12.1 permite uma resposta **uni-estrutural** e 12.2 **multi-estrutural**.

Quadro 5.4 - <u>Síntese de caracterização das questões do exame nacional do 9º ano - 2008/1ª chamada</u>

Categoria Domínio	Pré estrutural	Uni estrutural	Multi estrutural	Relacional	Abstracto	Total de itens
Estatística e Probabilidades	4.1	1. 4.2				**3**
Números e Cálculo	2.a 3. 6.1	2.b 5.				**4**
Álgebra e Funções	6.2	7.1 7.2 7.3	8. 9.			**6**
Geometria	11.1 11.3	11.2b 12.1.	10. 12.2 11.2a			**6**
Total de itens	**6 ou 7**	**7 ou 9**	**4 ou 5**	**0**	**0**	**19**

Os domínios temáticos Álgebra e Geometria marcam igual presença mas, os critérios específicos de classificação atribuem mais pontos à Geometria (34) do que à Álgebra e Funções (31). Ainda que as respostas à questão 2 e ao item 11.2 não tenham categorização bem identificada, esta prova revela-se mais fácil que as anteriores, dado que contém um grande número de itens que permitem resposta da categoria pré-estrutural e uni-estrutural, e nenhuma do nível relacional.

Prova 23 / 2ª Chamada / 2008

Questão 1

1. Qual é o mínimo múltiplo comum entre dois números primos diferentes, a e b?

☐ $a \times b$ ☐ a

☐ $a + b$ ☐ b

Critérios específicos de classificação:

1...**5 pontos**

Alternativa correcta: ($a \times b$)..5

Resolução proposta

A resposta correcta é $a \times b$.

Retomando alguns assuntos já conhecidos do 2º ciclo, para aprofundar um pouco mais múltiplo, divisor, … (ME – 1991, p. 22) os alunos no 7º ano trabalham em números naturais decompondo-os em somas ou produtos, associando-os segundo propriedades comuns: quadrados perfeitos, números primos, …

Número primo, número composto e saber “Indicar o m.d.c. e o m.m.c. entre dois números” (DEB – ME, 2001/02, pp.19 e 38) são conhecimentos que os alunos devem dominar e utilizar.

Neste caso, considerando a(3) e b(5) dois números primos:

$M_3 = \{0, 3, 6, 12, \mathbf{15}, 18 \dots\}$ $M_5 = \{0, 5, 10, \mathbf{15}, 20 \dots\}$

O mínimo múltiplo comum entre eles é $a \times b$ ($3 \times 5 = 15$).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Assim, a questão envolve mais do que um conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Tal como descrevi anteriormente, o aluno deve valer-se de um exemplo concreto para deduzir qual o menor múltiplo comum entre dois números primos diferentes.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **multi-estrutural**.

Questão 2

2. Qual é o menor número inteiro pertencente ao intervalo $\left[-\sqrt{10}, -\frac{1}{2}\right]$?

☐ -4 ☐ -3 ☐ -2 ☐ -1

Critérios específicos de classificação:

2... **5 pontos**

Alternativa correcta: (–3).. 5

Resolução proposta

A alternativa correcta é (-3).

No 6º ano o aluno conhece, representa na recta numérica, compara e ordena números inteiros relativos – ME, 1991, página 30. Perante esta questão, deve marcar na recta real os limites e o intervalo de números reais, pondo em prática o conhecimento descrito pelo objectivo “Interpretar e representar gráfica e simbolicamente intervalos de números reais”(DEB - 01/02, p. 57) para concluir que ao intervalo dado pertencem os números inteiros: -3, -2 e -1. O menor destes números é -3.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Ao aluno apenas é exigido o conhecimento descrito pelo objectivo do 3º ciclo acima referido.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo semelhantes a outros já muito experimentados.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta a esta questão é de nível **uni-estrutural**.

Questão 3

3. Numa aula de Matemática sobre as propriedades dos números, os alunos discutiram a afirmação que se segue:

O único divisor ímpar de um número par é o número um, porque é divisor de todos os números.

Explica por que razão esta afirmação é **falsa**.

Critérios específicos de classificação:

3... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Dá um exemplo de um número par e explicita claramente, pelo menos, um divisor ímpar diferente de 1............. 5

Dá um exemplo de um número par que tem um divisor ímpar diferente de 1, mas não explicita claramente este divisor.. 2

Resolução proposta

Para explicar que a afirmação é falsa, o aluno pode usar um exemplo que contradiga a afirmação. Por exemplo, o número 6 é par. $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$. Como qualquer número, admite como divisor o número 1. no entanto, também admite como divisor o número 3. Assim, existem números pares com mais do que um divisor que é um número ímpar.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Os conhecimentos envolvidos são de grau inferior ao nível de escolaridade em presença (DHGEBS – ME, 1991, p.22).

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio demonstrativo de que a afirmação é falsa, através de um exemplo concreto e dedutivo de que para um número par podem existir, para além de número 1, pelo menos mais um divisor que também é ímpar.

- **Tipo de resposta**

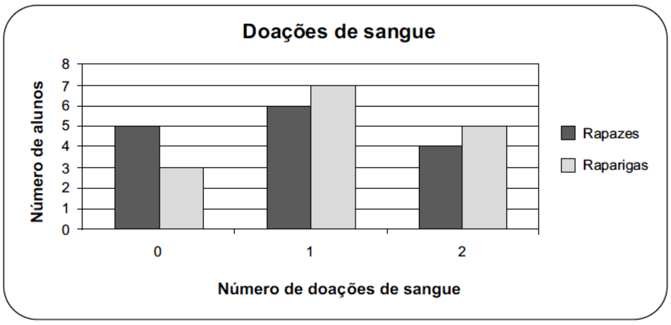
  A resposta é não única mas do mesmo tipo.

- **Categorização**

  A resposta para esta questão está ao nível **pré-estrutural**.

Questão 4

4. Numa Faculdade, realizou-se um estudo sobre o número de alunos da turma da Beatriz que já doaram sangue. O gráfico que se segue mostra o número de doações de sangue, por sexos.



4.1. Relativamente aos dados do gráfico, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ 30% dos alunos nunca doaram sangue.

☐ 30% dos alunos doaram sangue duas vezes.

☐ 65% dos alunos doaram sangue mais do que uma vez.

☐ 75% dos alunos doaram sangue menos do que duas vezes.

4.2. Escolhido ao acaso um aluno de entre todos os alunos da turma da Beatriz, qual é a probabilidade de essa escolha ser a de uma rapariga que doou sangue **menos do que duas vezes**?

Apresenta o resultado na forma de fracção irredutível.

Resposta: ____

Critérios específicos de classificação:

4.1. .... **5 pontos**

Alternativa correcta: (30% dos alunos doaram sangue duas vezes) 5

4.2. .... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Responde correctamente $\left(\frac{1}{3}\right)$ 5

Responde uma fracção equivalente a $\frac{1}{3}$ não irredutível 4

Identifica correctamente os casos possíveis, mas não os favoráveis, ou identifica correctamente os casos favoráveis, mas não os possíveis; por exemplo, responde $\left(\frac{10}{15} \, ou \, \frac{21}{15}\right)$ 2

Resolução proposta – 4.1

A opção correcta é que 30% dos alunos doaram sangue duas vezes.

Número total de alunos = 5 + 3 + 6 + 7 + 4 + 5 = 30

Número de alunos que doaram sangue duas vezes = 4 + 5 = 9

Percentagem dos alunos que doou sangue duas vezes = 9/30 = 0,30 = 30%

Antes de colocar «X» no quadrado correspondente à opção que considera correcta, o aluno tem de dominar os conhecimentos descritos pelos objectivos “Ler e interpretar informação contida em gráficos de barras” e “Resolver problemas da vida corrente que envolvam a aplicação directa de uma percentagem” (DHGEBS – ME, 1991, pp. 37 e 38).

Resolução proposta – 4.2

A probabilidade pedida é $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Esta questão interliga de uma forma rica as linguagens numérica e gráfica, tendo a gráfica uma especial importância pelo seu grande poder de comunicação.

O número de raparigas que doaram sangue zero vezes e uma vez é 3 + 7 = 10, num total de 30 alunos.

O aluno deve utilizar os conhecimentos adquiridos e descritos pelos objectivos “Calcular, em casos simples, a probabilidade de um acontecimento, como quociente entre o número de casos favoráveis e número de casos possíveis” (DEB – ME, 2001/02, p. 51) para calcular a probabilidade pedida e “Escrever fracções equivalentes a uma fracção dada” (DHGEBS – ME, 1991, p. 22).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 4.1 envolve conhecimentos de grau inferior ao nível de escolaridade em apreço e 4.2 utiliza apenas um conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios dedutivos similares a outros já experimentados.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  O item 4.1 permite uma resposta **pré-estrutural** e 4.2 **uni-estrutural**.

Questão 5

5. Na escola do Luís, foi realizado um torneio de futebol inter-turmas.

5.1. O professor de Educação Física resolveu propor um desafio matemático aos seus alunos, dizendo-lhes:

«A turma vai treinar durante $1{,}5 \times 10^3$ *minutos, antes do torneio. Calculem o número de treinos que serão feitos.»*

Sabendo que cada treino tem a duração de uma hora, quantos treinos foram feitos pelos alunos?

Apresenta todos os cálculos que efectuares.

5.2. Em cada jogo do torneio, uma turma obtém 2 pontos se vencer, 1 ponto se empatar e 0 pontos se perder.

Na primeira fase, cada turma defronta uma vez cada uma das outras turmas.

Na tabela, estão representados os totais dos resultados da primeira fase do torneio.

Turmas	Pontos	Vitórias	Empates	Derrotas
A	6	3	0	0
B	4	2	0	1
C	2	1	0	2
D	0	0	0	3

A tabela seguinte, relativa a todos os jogos realizados, já tem a indicação do resultado do jogo entre a turma **A** e a turma **B**, do qual saiu vencedora a turma **A**.

Completa a tabela com:

- na coluna da esquerda, as turmas participantes nos jogos realizados;
- na coluna da direita, a turma vencedora de cada jogo.

Jogo	Turma vencedora
A com **B**	**A**

Critérios específicos de classificação:

5.1. 5 pontos

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item como, por exemplo:

1.º Processo

A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

$1{,}5 \times 10^3 = 1500$ 3

$1500 \div 60 = 25$.. 2

2.º Processo

A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

$1{,}5 \times 10^3 \div (6 \times 10)$.. 1

$1{,}5 \times 10^3 \div (6 \times 10) = 1{,}5 \div 6 \times 10^2$ 1

$1{,}5 \div 6 \times 10^2 = 0{,}25 \times 10^2$.. 1

$0{,}25 \times 10^2 = 25$ 2

5.2. .... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Identifica na coluna da esquerda todos os jogos e, na coluna da direita, a respectiva turma vencedora 5

Jogo	Turma vencedora
A com B	A
A com C	A
A com D	A
B com C	B
B com D	B
C com D	C

Identifica na coluna da esquerda todos os jogos e, na coluna da direita, identifica correctamente:

apenas quatro turmas vencedoras.. 4

apenas três turmas vencedoras.. 3

apenas duas turmas vencedoras 2

apenas uma turma vencedora.. 1

Identifica na coluna da esquerda quatro jogos e, na coluna da direita, identifica correctamente:

as quatro turmas vencedoras.. 4

três turmas vencedoras.. 3

duas turmas vencedoras.. 2

uma turma vencedora.. 1

Identifica na coluna da esquerda três jogos e, na coluna da direita, identifica correctamente:

três turmas vencedoras.. 3

duas turmas vencedoras.. 2

uma turma vencedora.. 1

Identifica na coluna da esquerda dois jogos e, na coluna da direita, identifica correctamente:

duas turmas vencedoras.. 2

uma turma vencedora.. 1

Resolução proposta – 5.1

Foram feitos 25 treinos pelos alunos da escola do Luís.

No 2º ciclo o aluno já opera com potências de expoente natural e domina o conhecimento descrito no objectivo “ Resolver problemas utilizando as operações estudadas” (DHGEBS – ME, 1991, p. 34).

1º processo

$1{,}5 \times 10^3 = 1{,}5 \times 1000 = 1500$ minutos

Como cada treino demora 1 hora, isto é, 60 minutos, há que dividir 1500 por 60

$1500 \div 60 = 25$

2º processo

Além dos conhecimentos exigidos no 1º processo, em acordo com os critérios específicos de classificação, este requer que o aluno saiba “Operar com potências de expoente inteiro” – ME, 01/02, p. 38 para dividir potências com a base 10 e expoente natural.

Resolução proposta – 5.2

A tabela pedida é a seguinte:

Jogo	Turma Vencedora
A com B	A
A com C	A
A com D	A
B com C	B
B com D	B
C com D	C

Para construir a resposta o aluno deve identificar, interpretar e compreender a informação relevante que é dada pelo enunciado e pela tabela dos totais dos resultados da primeira fase do torneio. "Ler e interpretar informação contida em tabelas …", "Fazer conjecturas a partir da interpretação de informação" e "Construir tabelas … a partir de dados fornecidos ou recolhidos pelos alunos" são objectivos do programa do 2º ciclo (DHGEBS – ME, 1991, p. 23).

Assim, a turma A ganhou a todas as outras, a turma B perdeu com a turma A mas ganhou à C e à D, a turma C perdeu com A e B mas ganhou à D e a turma D perdeu com as três turmas.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 5.2 envolve mais do que um conhecimento de grau inferior ao nível de escolaridade a que reporta a prova de avaliação e 5.1 conhecimentos de grau inferior e um do 3º ciclo, se utilizar o 2º processo.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo.

- **Tipo de resposta**

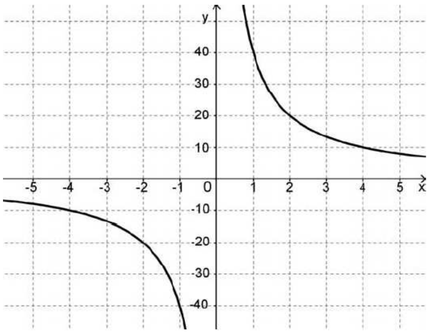
  A resposta é única e não fechada em 5.1, única e fechada para 5.2.

- **Categorização**

  Dependendo do processo de resolução utilizado para o item 5.1, este permite uma resposta **pré-estrutural** (5.1a) ou **uni-estrutural** (5.1b) e 5.2 permite resposta **pré-estrutural**.

Questão 6

6. Considera a seguinte representação gráfica de uma função.



Qual é a sua representação analítica?

☐ $y = \frac{40}{x}$ ☐ $y = 40x$ ☐ $y = -\frac{40}{x}$ ☐ $y = 40x + 4$

Critérios específicos de classificação:

6. .... **5 pontos**

Alternativa correcta: $y = \frac{40}{x}$ 5

Resolução proposta

A representação analítica da função é $y = \frac{40}{x}$.

A questão não está incorporada numa situação em concreto. “Interpretar e explorar gráficos que lhe sejam fornecidos” e “Reconhecer situações de proporcionalidade inversa, indicando a constante de proporcionalidade inversa” são objectivos do programa do 3º ciclo (ME, p. 54) e que envolvem conhecimentos que o aluno deve dominar. Exige ao aluno a destreza de relacionar o tipo de gráfico que lhe é apresentado – uma hipérbole, com uma função de proporcionalidade inversa. Para concluir se realmente se trata de uma proporcionalidade inversa, este deve fazer a leitura dos pontos que estão no cruzamento das quadrículas e verificar se o produto entre as duas coordenadas é 40 – constante de proporcionalidade inversa.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Na resolução da questão são envolvidos mais do que um conhecimento que o aluno tem de relacionar.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo semelhantes a outros já experimentados.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A questão permite resposta do nível **relacional**.

Questão 7

7. Resolve a seguinte inequação:

$$x + \frac{4-3x}{2} \leq -5$$

Apresenta todos os cálculos que efectuares.

Critérios específicos de classificação:

7. .... **6 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Desembaraçar a inequação de denominadores.. 2
Isolar os termos em x num dos membros da inequação 2
Obter a desigualdade $x \geq 14$ ou $14 \leq x$.. 2

Resolução proposta

$$x + \frac{4-x}{2} \leq -5 \Leftrightarrow 2x + 4 - 3x \leq -10 \Leftrightarrow 2x - 3x \leq -10 - 4 \Leftrightarrow -x \leq -14 \Leftrightarrow x \geq 14$$

Em presença de uma inequação o aluno aplica os conhecimentos descritos pelo objectivo "Resolver inequações do 1º grau a uma incógnita" (DEB – ME, 2001/02, p. 56). Desembaraça a inequação de denominadores e através dos princípios de equivalência entre desigualdades, isola os termos em x num dos membros da inequação e reduz os termos semelhantes até obter uma desigualdade do tipo $x \geq ...$

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  São envolvidos os conhecimentos descritos pelo objectivo acima referido.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio de carácter dedutivo semelhante a outros já muito experimentados em sala de aula, desenvolvido de forma sequencial e por etapas até obter a condição $x \geq 14$.

- **Tipo de resposta**

  A resposta e única, fechada e dentro do sistema envolvido.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **multi-estrutural**.

Questão 8

8. Uma *matrioska* é um brinquedo tradicional da Rússia, constituído por uma série de bonecas que são colocadas umas dentro das outras.

Numa série de *matrioskas*, a mais pequena mede 1 cm de altura, e cada uma das outras mede mais 0,75 cm do que a anterior.

Supondo que existe uma série com 30 bonecas nestas condições, alguma delas pode medir 20 cm de altura?

Mostra como chegaste à tua resposta.

Critérios específicos de classificação:

8... **6 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Apresenta uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema e responde que Não..6

Exemplo 1	**Exemplo 2**
$1 + 0{,}75\,\mathrm{n} = 20 \Leftrightarrow$	$20 - 1 = 19$
$\Leftrightarrow 0{,}75\,\mathrm{n} = 19 \Leftrightarrow$	$19 \div 0{,}75 = 25{,}(3)$
$\Leftrightarrow \mathrm{n} = 25{,}(3)$	Não há nenhuma boneca
Não há nenhuma boneca com 20 cm.	com 20 cm.

Apresenta uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas não responde, ou responde incorrectamente..5
Inicia uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas não a completa.
Por exemplo, escreve alguns números possíveis de medidas das bonecas.............................3
Responde que não, sem apresentar explicação 1

Resolução proposta

A resposta correcta é que não há nenhuma boneca com 20 cm de altura.

Sequência das alturas das matrioskas: 1; 1 + 0,75; 1+ 2 × 0,75; 1 + 3 × 0,75 …

A n-ésima matrioska terá a altura de 1 + (n – 1) × 0,75.

Será que existe algum valor de *n*, $n \in \mathbb{N}$, para o qual a altura seja 20 cm?

Procurar estratégias adequadas à resolução de problemas com números que pode passar por “Traduzir o problema por meio de uma equação” e “Resolver equações do 1º grau a uma incógnita” (p. 42):

$$1+(n-1)\times 0{,}75 = 20 \Leftrightarrow 1+0{,}75n-0{,}75=20 \Leftrightarrow 0{,}75n = 20-1+0{,}75 \Leftrightarrow n = 26{,}33...$$

Como o valor de *n* para a altura de 20 não é um número inteiro, significa que nenhuma das marioskas dessa sequência pode ter altura igual a 20 cm.

A resolução da questão requer que o aluno domine os conhecimentos descritos pelos objectivos do programa DEB – ME, 2001/02 “Interpretar o enunciado de um problema” (p. 27), “Traduzir dados de um problema da linguagem verbal para a linguagem matemática” (p. 23), “Continuar sequências de números”, “Descobrir relações entre números” (p. 38).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  São envolvidos vários conhecimentos podendo alguns deles estar relacionados, para que o aluno consiga chegar à expressão geral da altura da n-ésima matrioska.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios dedutivos e/ou indutivos para definir uma estratégia de resolução do problema e generalização para o n-ésimo termo de uma sequência de números.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

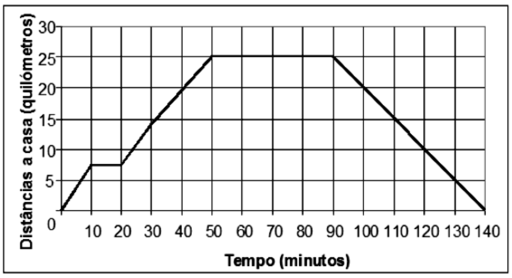
  A questão permite uma resposta que está ao nível **relacional**.

Questão 9

9. No sábado, o Luís combinou encontrar-se com uns amigos no pavilhão da Escola, para verem um jogo de andebol. Saiu de casa, de moto, às 10 horas e 30 minutos. Teve um furo, arranjou o pneu rapidamente e, depois, reuniu-se com os seus amigos no pavilhão da Escola, onde estiveram a ver o jogo.

Quando o jogo acabou, regressou a casa.

O gráfico representa as distâncias a que o Luís esteve da sua casa, em função do tempo, desde que saiu de casa até ao seu regresso.



Atendendo ao gráfico sobre a ida do Luís ao jogo de andebol, responde aos seguintes itens.

9.1. Quanto tempo levou ele a arranjar o furo?

Resposta: ____

9.2. A que horas chegou a casa?

Resposta: ____

9.3. O jogo de andebol tinha dois períodos, com a duração de 20 minutos cada, e um intervalo de 5 minutos entre os dois períodos.

Explica como podes concluir, **pela análise do gráfico**, que o Luís não assistiu ao jogo todo.

Critérios específicos de classificação:

9.1. .... **5 pontos**

Responde 10 minutos (ou das 10 horas e 40 minutos até às 10 horas e 50 minutos)... 5

Dá outra resposta.. 0

9.2. .... **6 pontos**

Responde 12 horas e 50 minutos 6

Dá outra resposta.. 0

9.3. ....**5 pontos**

A explicação deve conter os seguintes tópicos:
O tempo de duração do jogo com intervalo (45 minutos).
Concluir que não assistiu ao jogo todo porque só esteve no pavilhão durante 40 minutos ou equivalente.
A explicação contempla correctamente os dois tópicos 5
A explicação contempla correctamente um tópico..3

Resolução proposta – 9.1

O Luís demorou 10 minutos a arranjar o furo.

O aluno deve identificar o pequeno troço horizontal da linha que traduz distância/tempo como a pausa que o Luís foi obrigado a fazer para arranjar o furo.

Resolução proposta – 9.2

O Luís chegou a casa às 12 horas e 50 minutos.

Saiu de casa às 10 horas e 30 minutos e esteve fora 140 minutos. Como 140 minutos corresponde a 2 horas e 20 minutos, ele chegou a casa às 12 horas e 50 minutos.

Resolução proposta – 9.3

O Luís não assistiu ao jogo todo porque esteve no pavilhão apenas 40 minutos.

Tempo de duração do jogo com intervalo = 20 + 20 + 5 = 45 minutos
Por análise do gráfico e atendendo à escala do eixo que representa o tempo, vê-se que o Luís assistiu ao jogo durante 40 minutos.

"Interpretar e explorar gráficos que lhe sejam fornecidos" é um objectivo do programa do 3º ciclo 2001/02, página 54. A questão envolve a interpretação de uma situação da vida real, representada em gráfico. Na sua resolução o aluno tem de atender a toda a informação relevante que faz parte do enunciado e, estabelecer uma relação entre os pontos da linha que traduz o percurso que o Luís fez de moto e as abcissas dos mesmos, pelo que tem de ter especial atenção à graduação do eixo que representa o tempo em minutos.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A resolução de cada um dos itens exige o domínio do conhecimento descrito no objectivo acima referido.

- **Operações envolvidas**

  Estão envolvidos cálculos muito simples, que podem ser feitos mentalmente, e raciocínios semelhantes a outros experimentados ao longo do 3º ciclo, aquando da interpretação de gráficos de linha que traduzem passeios a pé, de bicicleta, moto ou carro.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  Qualquer um dos itens é uma questão **uni-estrutural**.

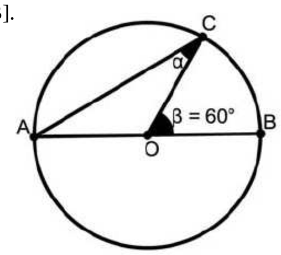
Questão 10

10. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro no ponto O e diâmetro [AB].

O ponto C pertence à circunferência.

Determina a amplitude, em graus, do ângulo α .

Apresenta os cálculos que efectuares.



Critérios específicos de classificação:

10...**5 pontos**

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item, como, por exemplo:

1.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Determinar que $A\hat{O}C = 180^o - 60^o = 120^o$ 2
Determinar que $O\hat{A}C + A\hat{C}O = 60^o$ 2
Concluir que $\alpha = 30^o$.. 1

2.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Determinar a amplitude de $\overset{\frown}{BC}$.. 2
Determinar a amplitude do ângulo inscrito **BAC**.. 2
Concluir que $\alpha = 30^o$.. 1

Resolução proposta

A resposta correcta é $\alpha = 30^0$.

1º processo

Utilizar a definição de ângulo raso para determinar a amplitude do ângulo AOC (120º), verificar que o triângulo [AOC] tem dois lados iguais e, por isso, os ângulos α e CAO são iguais e relembrar que «o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo», ME – 1991, página. 25.

2º processo

Para determinar a amplitude do ângulo α, o aluno tem de saber "Relacionar as amplitudes dos ângulos ao centro e ângulos inscritos com as amplitudes dos arcos correspondentes" (DEB – ME, 2001/02, p. 57). O triângulo [AOC] é isósceles porque tem dois lados que são raios da circunferência. Tendo dois lados iguais tem, também, dois ângulos iguais $\alpha = C\hat{A}O = 30^0$ porque $C\hat{A}O$ é um ângulo inscrito no mesmo arco de circunferência do ângulo β .

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Na resolução da questão estão envolvidos mais do que um conhecimento de um conhecimento do 2º ciclo ou conhecimentos de nível inferior em conjunto com os conhecimentos descritos no objectivo atrás referido.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo, semelhante a outros já experimentados em sala de aula.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e não fechada.

- **Categorização**

  A questão pode ser **pré-estrutural** (10.a) ou multi-estrutural (10.b).

Questão 11

11. Num triângulo rectângulo, a hipotenusa mede 15 cm e um dos catetos 10 cm.

Calcula a medida do comprimento do outro cateto.

Apresenta os cálculos que efectuares e, na tua resposta, escreve o resultado na forma de valor exacto.

Critérios específicos de classificação:

11...**5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

Substituir os valores dos catetos e da hipotenusa no Teorema de Pitágoras..3

Resolver a equação e obter para o valor do cateto ($\sqrt{125}$) (**ver nota**)..2

Nota:
Se o aluno escrever o resultado arredondado, esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

Resolução proposta

O outro cateto mede $\sqrt{125}$ cm.

$$10^2 + x^2 = 15^2 \Leftrightarrow x^2 = 225 - 100 \Leftrightarrow x^2 = 125 \Leftrightarrow x = \sqrt{125}$$

“ Resolver problemas, no plano e no espaço, aplicando o teorema de Pitágoras, recorrendo à calculadora sempre que aconselhável” (ME, p. 35) é um conhecimento que o aluno detém desde o 8º ano, sem ter ainda a noção que está a trabalhar uma equação do 2º grau incompleta à qual aplica as noções de raiz quadrada e valor exacto adquiridas no 7º ano de escolaridade.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão exige o domínio de mais de um conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios simples de carácter dedutivo, semelhantes a muito outros praticados por aplicação deste teorema.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **multi-estrutural**.

Questão 12

12. Num círculo de raio r, sejam d o diâmetro, P o perímetro e A a área.

Qual das seguintes igualdades **não é verdadeira**?

☐ $\frac{A}{r^2} = \pi$ ☐ $\frac{A}{2r} = \pi$ ☐ $\frac{P}{2r} = \pi$ ☐ $\frac{P}{d} = \pi$

Critérios específicos de classificação:

12....**5 pontos**

Alternativa correcta: $\frac{A}{2r} = \pi$ 5

Resolução proposta

A igualdade que não é verdadeira é $\frac{A}{2r} = \pi$.

A questão exige a manipulação das fórmulas do perímetro e da área do círculo, fórmulas estas que constam do formulário anexo à prova de exame.

O aluno tem de dominar muito bem o conhecimento "Resolver equações literais, nomeadamente fórmulas …, em ordem a uma das variáveis" (DEB – ME, 01/02, p. 43) por aplicação dos princípios de equivalência das equações.

Exemplo $A = \pi \times r^2 \Leftrightarrow \frac{A}{r^2} = \pi$.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão exige um só conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta que a questão permite é **uni-estrutural**.

Questão 13

13. Na figura 1, podes observar uma rampa de pedra, cujo modelo geométrico é um prisma em que as faces laterais são rectângulos e as bases são triângulos rectângulos; esse prisma encontra-se representado na figura 2.

Sabe-se que, neste prisma de bases triangulares: $\overline{AB} = 300\text{ cm}$, $\overline{BC} = 250\text{ cm}$ e $\overline{BE} = 42\text{ cm}$

Fig. 1

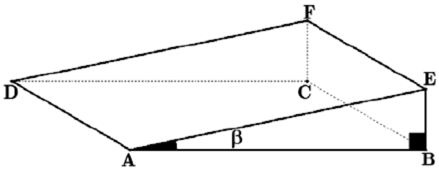


Fig. 2

13.1. Em relação à figura 2, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ☐ O plano que contém a face $[ABE]$ é perpendicular ao plano que contém a face $[AEFD]$.
- ☐ O plano que contém a face $[ABE]$ é paralelo ao plano que contém a face $[AEFD]$.
- ☐ O plano que contém a face $[ABE]$ é oblíquo ao plano que contém a face $[AEFD]$.
- ☐ O plano que contém a face $[ABE]$ é coincidente com o plano que contém a face $[AEFD]$.

13.2. Calcula a amplitude, em graus, do ângulo β .

Apresenta os cálculos que efectuares e, na tua resposta, escreve o resultado arredondado às unidades.

13.3. Determina o volume do prisma representado na figura 2.

Apresenta os cálculos que efectuares e, na tua resposta, escreve a unidade de medida.

Critérios específicos de classificação:

13.1...**5 pontos**

Alternativa correcta: (O plano que contém a face [ABE] é perpendicular ao plano que contém a face [AEFD].)..5

13.2... **6 pontos**

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item, como por exemplo:

1.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

Estabelecer a igualdade $\text{tg}\,\beta = \frac{42}{300}$ 3

Determinar correctamente β = 8º (**ver nota**)..3

2.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

Estabelecer a igualdade $42^2 + 300^2 = \overline{AE}^2$ (ou equivalente)..2

Estabelecer a igualdade (ou equivalente) $\cos\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$ 2

Determinar correctamente β = 8º (**ver nota**)..2

Nota:
Se o examinando escrever o resultado mal arredondado, esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

13.3. ....**6 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Determina correctamente o volume do prisma (1 575 000 cm^3) e apresenta os cálculos efectuados..6

Exemplo 1 **Exemplo 2**

$$V = \left(\frac{42\times 300}{2}\right)\times 250 = \quad V = \frac{42\times 250\times 300}{2} =$$

$$= 1\ 575\ 000\ \text{cm}^3 \quad = 1\ 575\ 000\ \text{cm}^3$$

Apresenta uma resolução em que revela compreender que o volume pedido corresponde ao volume de um prisma, mas não substitui correctamente um dos valores na fórmula...3

Exemplo:

V = 42 × 300 × 250 = 3 150 000 cm^3

Responde correctamente (1 575 000 cm^3), mas não apresenta os cálculos..1

Resolução proposta – 13.1

A opção correcta é o plano que contém a face [ABE] é perpendicular ao plano que contém a face [AEFD].

Antes de assinalar a resposta que considera correcta, o aluno tem de saber aplicar à figura o conhecimento descrito pelo objectivo “Resolver problemas no espaço, envolvendo os critérios dados”, nomeadamente posição relativa de planos (DEB – ME, 2001/02, p.61).

Resolução proposta – 13.2

A amplitude do ângulo β é, aproximadamente 8º.

Para responder correctamente há que saber “Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo”, “Determinar um ângulo agudo conhecida uma das suas razões trigonométricas, utilizando tabelas ou a calculadora” e “Indicar valores aproximados de um dado número real, controlando o erro” (DEB – ME, 2001/02, pp. 60 e 55)

A resposta pode ser alcançada através de mais de um processo de resolução. Por exemplo, $tg\beta = \frac{42}{300} \Leftrightarrow tg\beta = 0{,}14 \Leftrightarrow \beta = tg^{-1}(0{,}14) \Leftrightarrow \beta = 7{,}96... \approx 8^0$ ou pelo teorema de Pitágoras determinar $\overline{AE}$ e em seguida fazer uso dos conhecimentos descritos pelos objectivos atrás referidos.

Resolução proposta – 13.3

O prisma tem um volume de 1 575 000 cm^3.

Saber “Resolver problemas referentes a áreas e volumes de sólidos geométricos” (DEB – ME, p. 61), dão ao aluno oportunidade de relembrar e relacionar conhecimentos adquiridos anteriormente, perspectivando-os na resolução de novos problemas e contribuindo para uma visão panorâmica de geometria no espaço.

Por utilização da fórmula do volume do prisma em formulário anexo e dos dados fornecidos pelo enunciado:

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times \text{alt} = \frac{300\times 42}{2}\times 250 = 1575000\,\text{cm}^3$$

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 13.1 exige a aplicação de um único conhecimento – posição relativa entre dois planos. Os itens 13.2 e 13.3 apelam a mais do que um conhecimento.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo, similares a outros já experimentados na sala de aula, aquando da abordagem dos temas.

- **Tipo de resposta**

  Para o item 13.1 e 13.3 as respostas são únicas e fechadas. No item 13.2 a resposta é única mas não fechada.

- **Categorização**

  13.1 permite uma resposta **uni-estrutural**, 13.2 e 13.3 **– multi-estrutural**.

Quadro 5.5 - Síntese de caracterização das questões do exame nacional do 9º ano - 2008/2ª chamada

Categoria / Domínio	Pré estrutural	Uni estrutural	Multi estrutural	Relacional	Abstracto	Total de itens
Estatística e Probabilidades	4.1 5.2	4.2				**3**
Números e Cálculo	3. 5.1a	2. 5.1b	1.	8.		**5**
Álgebra e Funções		9.1 9.2 9.3 12.	7.	6.		**6**
Geometria	10.a	13.1	10.b 13.2 11 13.3			**5**
Total de itens	**3 ou 5**	**7 ou 8**	**5 ou 6**	**2**	**0**	**19**

Ao contrário das provas de exame analisadas anteriormente, aqui o domínio programático Álgebra e Funções está mais representado em termos de número de itens e de número de pontos que a Geometria, e os itens que permitem resposta da categoria uni-estrutural são em maior número, mesmo que não esteja identificada a categoria da resposta ao item 5.1 e à questão 10.

Prova 23 / 1ª Chamada / 2009

Questão 1

1. A agência de viagens *ViajEuropa* tem como destinos turísticos as capitais europeias.
A tabela 1 mostra o número de viagens vendidas pela agência nos primeiros três meses do ano.

Tabela 1

Meses	Capitais europeias				Total
	Madrid	Paris	Londres	Outras capitais	
Janeiro	382	514	458	866	**2220**
Fevereiro	523	462	342	1172	**2499**
Março	508	528	356	1008	**2400**
Total	**1413**	**1504**	**1156**	**3046**	

1.1. Qual foi a média do número de viagens vendidas por mês, para Madrid, nos primeiros três meses do ano?
Resposta: ___________________________

1.2. A *ViajEuropa* vai sortear um prémio entre os clientes que compraram viagens no mês de Março.
Qual é a probabilidade de o prémio sair a um cliente que comprou uma viagem para Paris?

Mostra como chegaste à tua resposta.
Apresenta o resultado na forma de dízima.

Critérios específicos de classificação:

1.1. .... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde 471 5
Dá outra resposta 0

1.2. .... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Mostra como chegou à resposta e responde 0,22 5
Mostra como chegou à resposta e responde sem ser em forma de dízima.............................. 4
Identifica correctamente os casos possíveis, mas não os favoráveis, ou
identifica correctamente os casos favoráveis, mas não os possíveis.............................. 2
Responde 0,22, sem mostrar como chegou à resposta 1
Dá outra resposta 0

Resolução proposta – 1.1

A média do número de viagens vendidas por mês, para Madrid, nos primeiros três meses do ano é dada por 1413/3, pelo que é de 471 viagens.

No âmbito da Estatística o aluno do 2º ciclo domina os conhecimentos descritos pelos objectivos "Ler e interpretar informação contida em tabelas ou gráficos", "Identificar a moda e calcular a média aritmética" e "Fazer conjecturas a partir da interpretação da informação (DHGEBS – ME, 1991, p. 39). Assim, este item é trivial para alunos do 9º ano, tanto mais porque fornece a soma (1413).

Resolução proposta – 1.2

A probabilidade de o prémio sair é $\frac{528}{2400} = 0,22$.

"Calcular, em casos simples, a probabilidade de um acontecimento como quociente entre números de casos favoráveis e número de casos possíveis" é um objectivo do programa do ME – 01/02, página 51, cujo conhecimento o aluno domina com facilidade.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 1.1 envolve conhecimentos que são de grau inferior ao nível de escolaridade em presença. Para resolver o item 1.2, o aluno apenas tem de estar na posse do conhecimento descrito pelo objectivo acima referido.

- **Operações envolvidas**

  Análise e interpretação da informação contida numa tabela e raciocínio de carácter dedutivo semelhante a outros já muito experimentados desde o 2º ciclo.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  O item 1.1 é uma questão que permite resposta **pré-estrutural** e 1.2 **uni-estrutural**.

Questão 2

2. Quais são os números do conjunto $A = \left\{-8, -\sqrt{27}, \frac{3}{7}, \pi, \sqrt{81}\right\}$ que são irracionais?

Assinala a alternativa correcta.

☐ $-\sqrt{27}$ e π ☐ π e $\sqrt{81}$ ☐ $-\sqrt{27}$ e $\sqrt{81}$ ☐ $\frac{3}{7}$ e $\sqrt{81}$

Critérios específicos de classificação:

2... **5 pontos**

Alternativa correcta $\left(-\sqrt{27}\right)$ e π 5

Resolução proposta

A alternativa correcta é $-\sqrt{27}$ e π.

O conhecimento da existência de dízimas infinitas não periódicas permite ao aluno organizar o conjunto dos números reais e "Relacionar números reais com o tipo de dízimas que os representam"(DEB – ME, 01/02, p. 55). Mostrando dominar o conhecimento descrito pelo objectivo, procura identificar quais são os dois números do conjunto A que se representam por dízimas infinitas não periódicas.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve um único conhecimento.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio dedutivo semelhante a outros já muito experimentados em termos de um único conhecimento.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **uni-estrutural**.

Questão 3

3. Qual das afirmações seguintes é verdadeira para todos os números divisíveis por 3?

Assinala a alternativa correcta.

- ☐ O número representado pelo algarismo das unidades é divisível por 3.
- ☐ O número representado pelo algarismo das unidades é igual a 3.
- ☐ A soma dos números representados por todos os seus algarismos é divisível por 3.
- ☐ O produto dos números representados por todos os seus algarismos é divisível por 3.

Critérios específicos de classificação:

3. .... **5 pontos**
Alternativa correcta (A soma dos números representados por todos os seus algarismos é divisível por 3).. 5

Resolução proposta

A alternativa correcta é «A soma dos números representados por todos os seus algarismos é divisível por 3», ou seja é um múltiplo de 3.
"Utilizar critérios de divisibilidade na resolução de problemas e jogos de números" é um conhecimento que o aluno detém do 2º ciclo – ME, 1991, página 22.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  É exigido o domínio de um único conhecimento que é de grau inferior ao nível de escolaridade em apreço.

- **Operações envolvidas**

  Recurso ao conhecimento referido e <u>dedução</u> da resposta correcta.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta a esta questão está ao nível **pré-estrutural**.

Questão 4

4. O Museu do Louvre é um dos mais visitados do mundo. No ano 2001, recebeu a visita de 5 093 280 pessoas.

A tabela 2 apresenta o número de visitantes, em três anos consecutivos.

Tabela 2

Anos	**2004**	**2005**	**2006**
Número de visitantes (em milhões)	6,7	7,5	8,3

4.1. Qual é, de entre as expressões seguintes, a que está em notação científica e é a melhor aproximação ao número de visitantes do Museu do Louvre, em 2001?

Assinala a alternativa correcta.

☐ 509×10^4 ☐ $5{,}1 \times 10^6$ ☐ $5{,}0 \times 10^6$ ☐ 51×10^5

4.2. Observa que o aumento do número de visitantes, **por ano**, entre 2004 e 2006, é constante.

Determina o ano em que haverá 15,5 milhões de visitantes, supondo que o aumento, nos anos seguintes, se mantém constante.

Mostra como chegaste à tua resposta.

Critérios específicos de classificação:

4.1. .... **5 pontos**
Alternativa correcta ($5{,}1 \times 10^6$) 5

4.2. .... **5 pontos**
A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Apresenta uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema e responde 2015.. 5
Apresenta uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas identifica mal o aumento 3

Exemplo 1:

$$15{,}5 = 1{,}6\,n + 8{,}3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 4{,}5$$

Responde 2010 ou 2011

Exemplo 2:

$$\frac{15{,}5 - 8{,}3}{1{,}6} = 4{,}5$$

Responde 2010 ou 2011

Identifica correctamente o aumento e inicia uma estratégia de resolução, mas não a completa, ou completa-a incorrectamente 2
Responde 2015, sem apresentar a estratégia seguida 1
Dá outra resposta 0

Resolução proposta – 4.1

A alternativa correcta é $5{,}1 \times 10^6$.

No final do ensino básico o aluno deve ser capaz de "Representar um número natural na forma de um polinómio nas potências de 10", "Utilizar a notação científica para interpretar e comparar números ou grandezas físicas" e "Estimar a ordem de grandeza de um resultado" (DEB – ME, 01/02, p. 38).

Resolução proposta – 4.2

O ano em que haverá 15,5 milhões de visitantes será em 2015.

$$7{,}5 - 6{,}7 = 0{,}8 \text{ e } 8{,}3 - 7{,}5 = 0{,}8.$$

O aumento do número de visitantes por ano é 0,8 milhões.

O item poderá ser resolvido somando 0,8 milhões de visitantes em cada ano, a começar no ano de 2006 e até atingir 15,5 milhões.

Ou

Equacionar o problema e resolvê-lo:

Seja x o número de anos que vão decorrer até o museu receber 15,5 milhões de visitantes.

$$8{,}3 + 0{,}8x = 15{,}5 \Leftrightarrow 0{,}8x = 15{,}5 - 8{,}3 \Leftrightarrow x = \frac{7{,}2}{0{,}8} = 9$$

Prevê-se 15,5 milhões de visitantes 9 anos após 2006, isto é em 2015.

"Traduzir um problema por meio de uma equação" e resolver uma equação do 1º grau a uma incógnita são objectivos do programa (DEB – ME, 01/02, p. 27).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 4.1 envolve mais do que um conhecimento do 3º ciclo e o item 4.2 poderá ser resolvido com recurso a conhecimentos de grau inferior ou de grau adequado ao nível de escolaridade em presença.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo semelhantes a outros já experimentados.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada para 4.1 e única e não fechada em 4.2.

- **Categorização**

  O item 4.1 é de resposta **multi-estrutural** e 4.2 **pré-estrutural** (4.2a) ou multi-estrutural (4.2b).

Questão 5

5. O Rui foi a Londres de 5 a 10 de Fevereiro.

A figura 1 mostra o valor de 1 euro na moeda inglesa, a libra, durante os primeiros 15 dias do mês de Fevereiro.

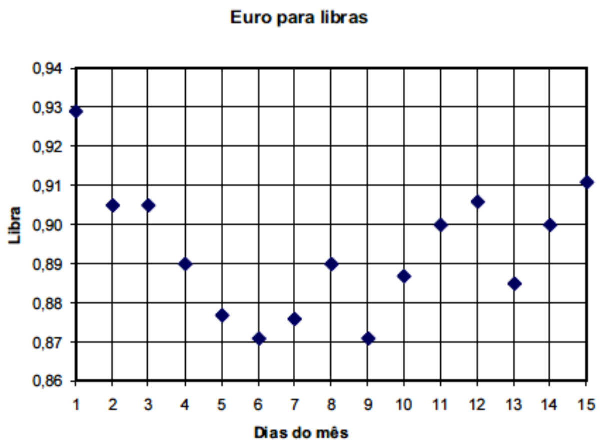


Fig. 1

5.1. Em que dias do mês de Fevereiro, 1 euro valia 0,90 libras?
Resposta: ___________________________

5.2. No dia 4 de Fevereiro, véspera da partida para Londres, o Rui trocou 100 euros por libras.

Quantas libras recebeu?
Resposta: ___________________________

5.3. No dia seguinte à sua chegada de viagem, 11 de Fevereiro, o Rui foi trocar as libras que lhe sobraram por euros.
Qual das expressões seguintes permite determinar quanto recebeu em euros, *E*, pela troca das libras, *L*, que lhe sobraram?

Assinala a alternativa correcta.

☐ $E = \frac{9}{10}L$ ☐ $E = \frac{10}{9}L$ ☐ $E = \frac{9}{10L}$ ☐ $E = \frac{10}{9L}$

Critérios específicos de classificação:

5.1. .... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde os dias 11 e 14 de Fevereiro 5
Responde apenas um dos dias 3
Dá outra resposta 0

5.2. .... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde 89 ou 89 libras 5
Dá outra resposta 0

5.3. .... **5 pontos**

Alternativa correcta $\left(E = \frac{10}{9}L\right)$ 5

Resolução proposta – 5.1

Nos dias 11 e 14 de Fevereiro 1 euro valia 0,90 libras.

Ao aluno apenas se pede que leia valores num gráfico simples, dando prova de dominar o conhecimento descrito pelo objectivo “Ler e interpretar informação contida em tabelas ou gráficos” (DHGEBS – ME, 1991, p. 39). A análise de gráficos que traduzem situações da vida real, permite a descrição e interpretação de um fenómeno de forma clara e sucinta.

Resolução proposta – 5.2

O Rui recebeu 89 libras.

Segundo o gráfico, no dia 4 de Fevereiro 1 euro valia 0,89 libras. Logo 100 euros equivaleram a $100 \times 0{,}89$ = 89 libras.

Qualquer aluno no final do 2º ciclo está apto a "Resolver problemas utilizando as operações estudadas" (DHGEBS – ME, 1991, p. 34).

Resolução proposta – 5.3

A alternativa correcta é $E = \frac{10}{9} L$.

Segundo o gráfico apresentado, no dia 11 de Fevereiro, uma libra valia 0,90 euros. Isto é $1L = \frac{9}{10} E \Leftrightarrow \frac{10}{9} L = E$.

O aluno para além de ler a informação dada pelo gráfico tem de saber "Resolver equações literais, nomeadamente fórmulas …, em ordem a uma das incógnitas" (DEB – ME, 01/02, p. 42).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Os itens 5.1 e 5.2 envolvem conhecimentos de grau inferior ao nível de escolaridade em presença. O item 5.3 envolve um único conhecimento que é do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Análise e interpretação da informação fornecida pelo gráfico de pontos e raciocínios dedutivos simples.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  Cada um dos itens 5.1 e 5.2 é uma questão de resposta **pré-estrutural** e 5.3 **uni-estrutural**

Questão 6

6. Em Moscovo, a Susana guardou alguns rublos, moeda russa, para comprar lembranças para os amigos. Decidiu que as lembranças teriam todas o mesmo preço.

Verificou que o dinheiro que guardou chegava exactamente para comprar uma lembrança de 35 rublos para cada um de 18 amigos, mas ela queria comprar lembranças para 21 amigos.

Qual o valor máximo que poderia pagar por cada lembrança, com o dinheiro que tinha?

Mostra como chegaste à tua resposta.

Critérios específicos de classificação:

6.... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Apresenta uma estratégia apropriada de resolução do problema e responde
30 ou 30 rublos 5
Apresenta uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas não a
completa, ou completa-a incorrectamente 3

Exemplo 1: $35 \times 18 = 630$

Exemplo 2: $\frac{35 \times 21}{18} = 41$

Responde 30 ou 30 rublos, sem apresentar a estratégia.. 1
Dá outra resposta 0

Resolução proposta

Cada uma das 21 lembranças poderia custar, no máximo 630/ 21 = 30 rublos.

"Traduzir em linguagem matemática uma situação dada em linguagem corrente e reciprocamente" e "Resolver problemas utilizando as operações estudadas" são objectivos do programa do 2º ciclo, ME – 1991, página 34.

A Susana guardou $35 \times 18 = 630$ rublos. Se quiser comprar lembranças para 21 amigos não poderá gastar mais do que 30 rublos em cada uma.

Ou

Traduzir o problema por meio de uma equação e resolvê-la:

Total do dinheiro guardado = $35 \times 18 = 630$ rublos.

Seja x o número de rubros que a Susana pode pagar por cada uma das 21 lembranças: $x \times 21 = 630 \Leftrightarrow x = 630 / 21 \Leftrightarrow x = 30$ rublos.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve conhecimentos de grau inferior ou mais de um conhecimento ao nível de escolaridade para o qual está feita a prova.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios simples de carácter dedutivo para construir uma estratégia de resolução do problema.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **pré-estrutural** (6.a) ou multi-estrutural (6.b).

Questão 7

7. Um museu recebeu 325 euros pela venda de bilhetes, durante um dia.

Nesse dia, o número dos bilhetes vendidos para adultos foi o triplo do número dos bilhetes vendidos para crianças.

Os bilhetes de adulto custavam 2 euros e os bilhetes de criança 50 cêntimos.

Considera que *a* designa o número dos bilhetes vendidos para adultos e *c*, o número dos bilhetes vendidos para crianças.

Qual dos sistemas de equações seguintes permite determinar o número dos bilhetes vendidos para crianças e o número dos bilhetes vendidos para adultos, nesse dia?

Assinala a alternativa correcta.

☐ $\begin{cases} a = 3c \\ a + c = 325 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} a = c + 3 \\ a + c = 325 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} a = 3c \\ 2a + 0{,}5c = 325 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} a = c + 3 \\ 2a + 0{,}5c = 325 \end{cases}$

Critérios específicos de classificação:

7.... **5 pontos**

Alternativa correcta:

$\begin{cases} a = 3c \\ 2a + 0{,}5c = 325 \end{cases}$ 5

Resolução proposta

A alternativa correcta é $\begin{cases} a = 3c \\ 2a + 0{,}5c = 325 \end{cases}$

Para resolver a questão, o aluno tem de ler, analisar, interpretar e relacionar toda a informação dada pelo enunciado, e dominar os conhecimentos descritos pelo objectivo "Traduzir o enunciado de um problema da linguagem corrente para a linguagem matemática", neste caso para um sistema de duas equações do 1º grau a duas incógnitas" (DEB – ME, 01/02, p. 52), como conjunção das condições impostas.

As variáveis *a* e *c* designam o número de bilhetes para adulto e o número de bilhetes para criança, respectivamente. O número de bilhetes para adulto é o triplo do número de bilhetes para criança, isto é $a = 3c$. Se cada bilhete para adulto custa € 2 e um bilhete para criança custa € 0,50 então, $2a + 0{,}50c = 325$.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  De acordo com o que é referido atrás, a resolução da questão envolve conhecimentos de grau adequado ao 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo utilizados para construir, de forma adequada, as duas equações do 1º grau com as incógnitas fornecidas.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta a esta questão é de nível **multi-estrutural**.

Questão 8

8. Resolve a equação seguinte:

$$4\left(x^2+x\right)=1-x^2$$

Apresenta os cálculos que efectuares.

Critérios específicos de classificação:

8... **6 pontos**

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item, como por exemplo:
1.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Desembaraçar a equação de parênteses 2
Substituir correctamente, na fórmula resolvente, *a*, *b* e *c* pelos respectivos valores
(**ver nota 1**).. 2
Escrever as soluções da equação – 1 e $\frac{1}{5}$ (**ver nota 2**).. 2
2.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Verificar que –1 é solução.. 2
Verificar que $\frac{1}{5}$ é solução.. 2
Referir que uma equação do 2.º grau não tem mais do que duas soluções.................... 2

Resolução proposta

A solução da equação é $\left\{-1, \frac{1}{5}\right\}$.

<u>1º processo</u>

Em presença de uma equação do 2º grau com uma incógnita o aluno opta por resolvê-la e, se a equação se revela completa, utiliza a fórmula resolvente que consta do formulário anexo à prova de exame.

$$4\left(x^2+x\right)=1-x^2 \Leftrightarrow 4x^2+4x+x^2-1=0 \Leftrightarrow 5x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{1}{5}$$

<u>2º processo</u>

Saber que «uma equação do 2º grau não tem mais do que duas soluções» e “Determinar o valor numérico de uma expressão com variáveis” (DEB – 01/02, p. 23) para, por tentativa, encontrar o par de números que verifica a igualdade.

$$4\left(x^2 + x\right) = 1 - x^2$$

Se $x = -1$ $4 \times ((-1)^2 + (-1)) = 0$ e $1 - (-1)^2 = 0$

Se $x = \frac{1}{5}$ $4 \times \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\right) = 0{,}96$ e $1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0{,}96$

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Na resolução da questão estão envolvidos mais do que um conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  O desenvolvimento sequencial de todo o processo é bem conhecido: desembaraçar de parênteses, reduzir os termos semelhantes, pôr a equação na forma canónica, substituir na fórmula resolvente *a*, *b* e *c* pelos respectivos valores e efectuar os cálculos até chegar à ou às soluções da equação (1º processo), assim como os conhecimentos descritos anteriormente (2º processo).

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única mas não fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **multi-estrutural**.

Questão 9

9. A figura 2 [ABCDEFGH] é um octógono regular inscrito na circunferência de centro O.

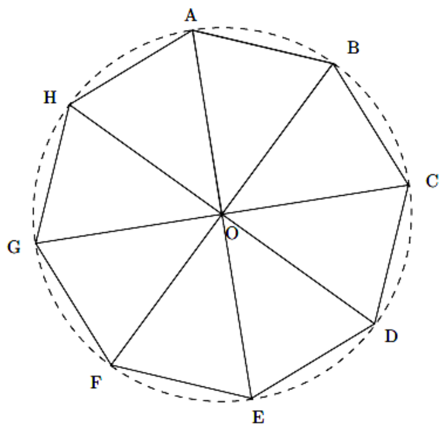


Fig. 2

Qual é a imagem do triângulo [AOB] obtida por meio da rotação de centro no ponto O e de amplitude 135º, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio?

☐ [COD] ☐ [EOD] ☐ [HOG] ☐ [GOF]

Critérios específicos de classificação:

9. .... **5 pontos**

Alternativa correcta ([GOF]) 5

Resolução proposta

A imagem do triângulo [AOB] é [GOF].

O estudo das rotações é feito fundamentalmente a partir de polígonos regulares em torno do seu centro, num e noutro sentido, cumprindo o objectivo do programa do ME, 01/02, página 57 "Identificar rotações de polígonos regulares, em torno do seu centro", neste caso um triângulo.
O octógono regular divide a circunferência em oito arcos e oito ângulos ao centro iguais. O ângulo AOB tem de amplitude 360/8 = 45 – «a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados», 135/45 = 3, ou seja o triângulo [AOB] vai ocupar a posição do triângulo [GOF] após uma rotação de centro no ponto O, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e de amplitude 135.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Sendo dado o sentido da rotação e a sua amplitude, o aluno apenas terá de dominar os conhecimentos descritos.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo semelhantes a outros experimentados em sala de aula sobre rotações.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  Esta questão é de resposta **multi-estrutural**.

Questão 10

10. O mapa da figura 3 representa o distrito do Porto, que o Rui vai visitar com os pais.

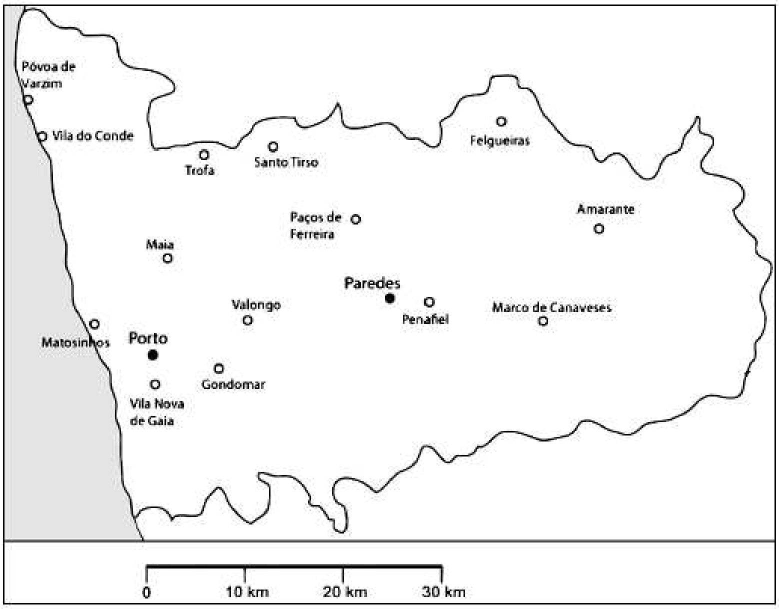


Fig. 3

Os pais do Rui vão visitar o Porto e Paredes. Pretendem ficar alojados num local que se situe a menos de vinte quilómetros de Paredes e que seja mais próximo do Porto do que de Paredes.

Sombreia a lápis a porção do mapa relativa à zona onde os pais do Rui deverão ficar alojados.

Utiliza material de desenho e de medição.

Nota: Se traçares linhas auxiliares, não as apagues.

Critérios específicos de classificação:

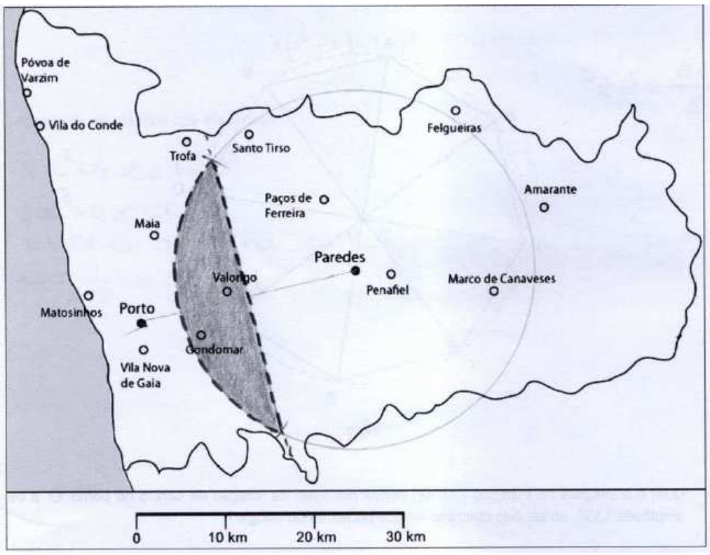
10...**6 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Sombreia a porção do mapa compreendida no círculo ou arco com centro em Paredes e de raio 4 cm, e a mediatriz do segmento de recta de extremos no Porto e em Paredes mais perto do Porto, com rigor aproximado (**ver nota**) 6
Constrói o círculo ou arco com centro em Paredes e de raio 4 cm e a mediatriz o segmento de recta de extremos no Porto e em Paredes, com rigor aproximado(**ver nota**)........ 5
Constrói a mediatriz do segmento de recta de extremos no Porto e em Paredes 4
Constrói o círculo ou arco com centro em Paredes e de raio 4 cm (**ver nota**) 3
Dá outra resposta 0

Nota: Considera-se que o desenho é feito com rigor aproximado se o comprimento do raio do círculo ou arco, que contém o lugar geométrico desenhado, tiver um erro não superior a 0,2 cm.

Resolução proposta

Se os pais do Rui pretendem alojar-se a menos de 20 km de Paredes, essa região corresponde a um círculo (sem a circunferência) com centro em Paredes e raio igual a 20 km na escala dada. Se, ao mesmo tempo, pretendem ficar mais próximos do Porto, há que traçar também a traço interrompido, a mediatriz do segmento de recta que une o Porto a Paredes e sombrear a zona do círculo anteriormente desenhada que fica à esquerda da mediatriz, como se pode ver na figura:



Para responder à questão o aluno tem de dominar os conhecimentos descritos pelos objectivos "construir figuras geométricas utilizando instrumentos de medição e desenho", "Identificar o conjunto de pontos do plano que estão a uma distância menor que *d* de um dado ponto", "Reconhecer que o conjunto dos pontos do plano equidistantes dos extremos de um segmento de recta é a recta perpendicular ao meio do segmento" e "Descrever e justificar por escrito o processo usado na resolução do problema" (DEB – ME, 01/02, pp. 31 e 41).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve os conhecimentos descritos nos objectivos atrás referidos, articulados e relacionados.

- **Operações envolvidas**

  Leitura, análise e interpretação da informação dada pelo enunciado, pelo mapa e respectiva escala. Dedução da necessidade de construir uma circunferência de centro em Paredes e raio de 4 cm, bem como da mediatriz do segmento de recta de extremos Porto e Paredes e da porção do mapa a sombrear.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A questão permite uma resposta que está ao nível **relacional.**

Questão 11

11. Na figura 4, sabe-se que:

- O é o centro da circunferência;
- [AB] e [BC] são cordas geometricamente iguais;
- D é o ponto de intersecção do diâmetro [EB] com a corda [AC].

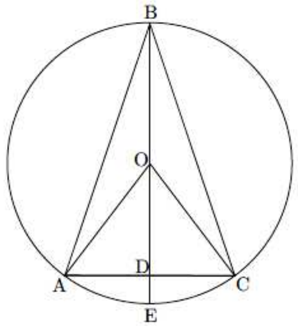


Fig. 4

Nota: A figura 4 não está construída à escala.

11.1. Qual é, em graus, a amplitude do arco AC, supondo que $A\hat{B}C = 28^{o}$?
Resposta: ___________________________

11.2. Qual é, em centímetros, a medida do comprimento de [DE], supondo que $\overline{AO}$ = 6,8 cm e $\overline{AC}$ = 6,4 cm?

Apresenta os cálculos que efectuares.

Critérios específicos de classificação:

11.1... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde 56 ou 56º 5
Dá outra resposta 0

11.2... **6 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Apresenta uma estratégia apropriada de resolução do problema e responde 0,8 6
Apresenta uma estratégia apropriada de resolução do problema, mas não a
completa ou completa-a incorrectamente.. 4

Exemplo 1:

$$6{,}8^2 = 3{,}2^2 + \overline{OD}^2$$
$$\overline{OD} = 6$$
$$6\ cm$$

Exemplo 2:

$$6{,}8^2 = 3{,}2^2 + \overline{OD}^2$$
$$\overline{OD} = 6$$
$$\overline{DE} = 6{,}8 + 6 = 12{,}8$$

Exemplo 3:

$$6{,}8^2 = 3{,}2^2 + \overline{OD}^2$$
$$\overline{OD} = 6$$
$$\overline{DE} = 6{,}4 - 6 = 0{,}4$$

Apresenta uma estratégia de resolução ao problema, mas utiliza incorrectamente
o Teorema de Pitágoras ou a razão trigonométrica 2

Exemplo 1:

$$\overline{OD}^2 = 3{,}2^2 + 6{,}8^2$$
$$\overline{OD} = 7{,}5$$
$$\overline{DE} = 7{,}5 - 6{,}8 = 0{,}7$$

Exemplo 2:

$$tg\,76^{o} = \frac{3,2}{\overline{BD}}$$

Apresenta apenas o valor 0,8 1
Dá outra resposta 0

Resolução proposta – 11.1

A amplitude do arco AC é 56.

Para responder à questão o aluno tem de dominar o conhecimento descrito pelo objectivo “Relacionar as amplitudes dos ângulos ao centro e ângulos inscritos com as amplitudes dos arcos correspondentes”

(DEB – ME, 01/02, p. 57). O ângulo ABC é inscrito na circunferência de centro O. Logo, o arco compreendido entre os seus lados mede o dobro da amplitude do ângulo, ou seja 2×28 = 56º.

Resolução proposta – 11.2

A medida do comprimento de [DE] é 0,8 cm.

No final do 3º ciclo, o aluno deve "Resolver problemas, relacionando entre si propriedades de figuras geométricas" e "Resolver problemas no plano, aplicando o teorema de Pitágoras", recorrendo à calculadora sempre que aconselhável" (DEB – ME, 01/02 p. 35) e, por análise e interpretação da figura, fazer as seguintes deduções: o triângulo [AOC] é isósceles já que dois dos seus lados são raios da circunferência, o segmento de recta AD tem metade do comprimento de [AC] porque o diâmetro BE divide o triângulo [AOC] em dois triângulos rectângulos geometricamente iguais.

Ora, DO é um dos catetos de um triângulo rectângulo do qual se conhece a medida da hipotenusa (6,8 cm) e em que o comprimento do outro cateto é metade da corda AC (3,2 cm). Assim, pelo teorema de Pitágoras:

$$6{,}8^2 = 3{,}2^2 + \overline{OD}^2 \Leftrightarrow 6{,}8^2 - 3{,}2^2 = \overline{OD}^2 \Leftrightarrow \overline{OD}^2 = 36 \Leftrightarrow \overline{OD} = 6$$

A medida do segmento de recta DE é 6,8 – 6 = 0,8 cm, já que OE é também um raio da circunferência.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 11.1 envolve um único conhecimento do 3º ciclo, mas 11.2 envolve mais do que um conhecimento do nível de escolaridade em presença.

- **Operações envolvidas**

  Análise detalhada da figura 4 para <u>deduzir</u> informação importante que conduz, por raciocínios simples, à utilização do teorema de Pitágoras e à resolução do problema geométrico.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  O item 11.1 permite resposta **uni-estrutural** e 11.2 é de resposta **multi-estrutural**.

Questão 12

12. A figura 5 é a imagem de um monumento situado no centro de uma cidade. Todos os blocos desse monumento resultam de um corte de um prisma quadrangular recto. A figura 6 representa o modelo geométrico de um dos blocos do mesmo monumento.

Fig. 5

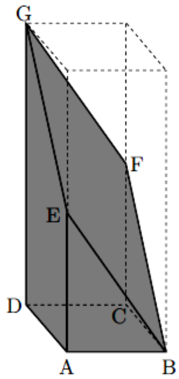


Fig. 6

12.1. Em relação à figura 6, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

Assinala a alternativa correcta.

- ☐ A recta EG é paralela ao plano que contém a face [ABCD].
- ☐ A recta EG é perpendicular ao plano que contém a face [ABCD].
- ☐ A recta FB é paralela ao plano que contém a face [ADGE].
- ☐ A recta FB é perpendicular ao plano que contém a face [ADGE].

12.2. Na figura 6, sabe-se que $\overline{AB} = 2$ m e que $A\hat{E}B = 35°$.

Qual é, em metros, a medida do comprimento de [EB]?

Apresenta os cálculos que efectuares e, na tua resposta, escreve o resultado arredondado às unidades.

12.3. No sólido representado na figura 7, sabe-se que [ABCDEFGH] é um prisma quadrangular recto, e que $\overline{DA} = \overline{DC} = 2$ m e $\overline{DH} = 5$ m.

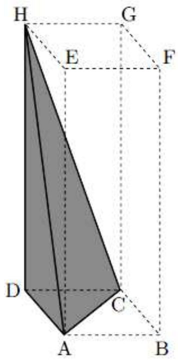


Fig. 7

Qual é, em metros cúbicos, o volume da pirâmide triangular sombreada?

Apresenta os cálculos que efectuares e, na tua resposta, escreve o resultado arredondado às décimas.

Critérios específicos de classificação:

12.1...**5 pontos**

Alternativa correcta (A recta FB é paralela ao plano que contém a face [ADGE]) 5

12.2...**6 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

Estabelecer a igualdade $sen.35° = \frac{2}{h}$ 3

Determinar $h = 3$...3

12.3. .... **6 pontos**

Podem ser utilizados vários processos para responder a este item, como por exemplo:
1.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Determinar $A_b = 2$ 2
Escrever a expressão $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 5$ 2
Determinar $V = 3,3$ 2
2.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Determinar. $A_b = 4$ 2
Escrever a expressão $V = \frac{4 \times 5}{6}$ 2
Determinar $V = 3,3$ 2

Resolução proposta – 12.1

A alternativa correcta é «A recta FB é paralela ao plano que contém a face [ADGE]».

A resposta correcta leva a que o aluno observe a figura 6 e domine o conhecimento descrito pelo objectivo “Identificar, em modelos concretos, rectas e planos em várias posições relativas” (DEB – ME, 01/02, p. 61).

Resolução proposta – 12.2

A medida do segmento EB é 3 metros.

Por análise e interpretação da figura, o aluno deve concluir que [EB] é a hipotenusa do triângulo rectângulo [AEB] e, como é dada a medida do cateto oposto ao ângulo de 35º, há que recorrer à trigonometria e pôr à prova os conhecimentos “Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo” e “ Indicar valores aproximados de um dado número real, controlando o erro” (DEB – ME, 01/02, pp. 60 e 55).

$$sen.35^{o} = \frac{2}{\overline{EB}} \Leftrightarrow sen.35^{o} \times \overline{EB} = 2 \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{2}{sen.35^{o}} \Leftrightarrow \overline{EB} = 3,48... \approx 3$$

Resolução proposta – 12.3

O volume da pirâmide triangular sombreada é 3, 3 m^3.

A base da pirâmide é um triângulo cuja área corresponde a metade da área do quadrado que é a base do prisma.
Existe mais do que um processo para encontrar o volume pedido.
<u>*1º processo*</u>
Ao utilizar a fórmula que faz parte do formulário anexo à prova de exame,
$V = \frac{1}{3} \times A_{base} \times alt. = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times 5 = \frac{20}{6} = 3,333... \approx 3,3\,\mathrm{m}^3$, o aluno mostra dominar os conhecimentos “Determinar áreas e volumes de sólidos e de objectos da vida real e “ Indicar valores aproximados de um dado número real, controlando o erro” (DEB – ME, 01/02, pp. 26 e 55).

2º processo

O volume do prisma quadrangular recto é igual ao volume de 6 pirâmides com a mesma altura e área da base metade da área da base do prisma.

Volume $_{\text{Prisma}}$ = $2 \times 2 \times 5 = 20\ m^3$.

Volume $_{\text{Pirâmide}}$ = $\frac{1}{6} \times 20 = \frac{20}{6} = 3{,}333... \approx 3{,}3\,m^3$

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 12.1 envolve o conhecimento descrito pelo objectivo atrás referido. Os itens 12.2 e 12.3 requerem a utilização de mais do que um conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Leitura e interpretação da informação dada no enunciado e observação cuidada das figuras 6 e 7, para deduzir as respostas correctas, através de raciocínios semelhantes a outros já experimentados.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  O item 12.1 permite uma resposta **uni-estrutural** e cada um dos itens 12.2 e 12.3 é de resposta **multi-estrutural**.

Quadro 5.6 - Síntese de caracterização das questões do exame nacional do 9º ano - 2009/1ª chamada

Categoria / Domínio	Pré estrutural	Uni estrutural	Multi estrutural	Relacional	Abstracto	Total de itens
Estatística e Probabilidades	1.1	1.2				2
Números e Cálculo	3. 4.2a 6.a	2.	4.1 4.2b 6.b			5
Álgebra e Funções	5.1 5.2	5.3	7. 8.			5
Geometria		11.1 12.1	9. 11.2 12.2 12.3	10.		7
Total de itens	4 ou 6	5	7 ou 9	1	0	19

De acordo com o modelo de caracterização inspirado na taxonomia SOLO, as respostas ao item 4.2 e à questão 6 não têm categoria bem identificada. A Geometria e os itens da categoria multi-estrutural voltam a estar em destaque, tanto mais se as respostas ao item 4.2 e à questão 6 subirem para o nível multi-estrutural.

Prova 23 / 2ª Chamada / 2010

A prova está de acordo com a informação disponibilizada pelo Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE), para os exames do 9º ano – 2010 e referida no final do segundo capítulo, em termos de cotação em pontos por domínio temático e por valorização das competências definidas no Currículo Nacional do Ensino Básico. A sua estrutura sintetiza-se nos dois quadros seguintes:

Quadro 5.7 - Valorização dos domínios/competências na prova.

Competência / Domínio	Conceitos e Procedimentos	Raciocínio e Resolução de Problemas	Comunicação	Cotação (em pontos)
Estatística e Probabilidades	1		3	**10**
Números e Cálculo	2 4 5 6			**20**
Álgebra e Funções	7 8.1 8.2 8.3 9		10	**32**
Geometria		11.1 11.2 11.3 12.1 12.2 12.3 13		**38**
Cotação (em pontos)	**51**	**38**	**11**	**100**

Quadro 5.8 - Tipologia, Número de Itens e Respectiva Cotação

Tipologia de Itens		Número de Itens	Cotação por Item (em pontos)
Itens de Selecção	• Escolha Múltipla.	6	5
Itens de Construção	• Resposta Curta.	2	5
	• Cálculo. • Composição. • Construção Geométrica. • Resolução de Problemas.	11	5 a 6

No que diz respeito ao tipo de itens, número de itens de cada tipo e respectiva cotação, também estes estão de acordo com a informação emitida, antecipadamente pelo GAVE.

Questão 1

1. Pediu-se a 210 pessoas, cada uma delas dona de um cão e de um gato, que respondessem à seguinte questão:

«Como classifica a relação entre o seu cão e o seu gato?»

Havia três opções de resposta: «Boa», «Indiferente» e «Agressiva».

A Tabela 1 apresenta os totais de cada uma das opções de resposta.

Tabela 1

Relação entre o cão e o gato	Boa	Indiferente	Agressiva
Totais	140	50	20

Escolhida ao acaso uma das pessoas entrevistadas, qual é a probabilidade de essa pessoa ter respondido que a relação entre o seu cão e o seu gato é boa?

Escreve a tua resposta na forma de fracção irredutível.
Resposta: ____

Critérios específicos de classificação:

1...**5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho

Responde correctamente, na forma de fracção irredutível $\left(\frac{2}{3}\right)$ 5

Responde correctamente, na forma de fracção não irredutível $\left(\frac{140}{210}\right)$ ou equivalente........................4

Responde correctamente, sem ser na forma de fracção (0,(6))........................3

Responde $\frac{70}{210}$ ou $\frac{50}{210}$ ou $\frac{20}{210}$ 1

Dá outra resposta........................0

Resolução proposta

A probabilidade pedida é $\frac{140}{210} = \frac{2}{3}$

A resposta correcta exige que o aluno domine o conhecimento descrito pelo objectivo "Calcular, em casos simples, a probabilidade de um acontecimento como quociente entre o número de casos favoráveis e número de casos possíveis" do programa do 9º ano (DEB – ME, 01/02, p. 51) e saiba "Escrever fracções equivalentes a uma fracção dada" (DHGEBS – ME, 1991, p. 24), conhecimento adquirido no 2º ciclo.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve um único conhecimento de grau adequado ao nível de escolaridade em presença.

- **Operações envolvidas**

  Análise e interpretação da tabela para, através de um raciocínio muito simples, <u>deduzir</u> a fracção solicitada.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão está ao nível **uni-estrutural**.

Questão 2

2. Um tratador de animais de um jardim zoológico é responsável pela limpeza de três jaulas: a de um tigre, a de uma pantera e a de um pantera e a de um leopardo.

O tratador tem de lavar a jaula de cada um destes animais, uma vez por dia.

De quantas maneiras diferentes pode o tratador realizar a sequência da lavagem das três jaulas?

Assinala a opção correcta.

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 6

Critérios específicos de classificação*:*

2... **5 pontos**

Assinala a opção correcta (6)..5

Resolução proposta

A opção correcta é 6.

A questão é do senso comum, não estando directamente ligada ao conhecimento matemático. O aluno deve utilizar uma estratégia de resolução e "Descrever o processo utilizado na resolução de um problema" (DHGEBS – ME, 1991, p. 34). Como, por exemplo, seja T: «A jaula do tigre», P: «A jaula da Pantera» e L: «A jaula do leopardo». As diferentes sequências de lavagem das jaulas são: TPL, TLP, PTL, PLT, LPT e LTP.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão exige um conhecimento que é de grau inferior ao nível de escolaridade envolvido na prova.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio de carácter dedutivo, semelhante a outros já experimentados.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A questão permite uma resposta **pré-estrutural**.

Questão 3

3. Registou-se o número de macacos de um jardim zoológico, com 5, 6, 7 e 8 anos de idade.

A Tabela 2, onde não está indicado o número de macacos com 7 anos de idade, foi construída com base nesse registo.

Tabela 2

Idade dos macacos (em anos)	5	6	7	8
Número de macacos	3	4	...	2

A mediana das idades destes animais é 6,5.

Determina o número de macacos com 7 anos de idade.

Mostra como chegaste à tua resposta.

Critérios específicos de classificação:

3...**5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente (5) e mostra como chegou à resposta 5
Apresenta uma resolução em que revela compreender o conceito de mediana, mas
não responde correctamente 3
Responde correctamente (5), sem mostrar como chegou à resposta 1
Dá outra resposta... 0

Resolução proposta

O número de macacos com 7 anos é 5.

"Identificar a moda e calcular a média aritmética" são conhecimentos do 2º ciclo de estudos (DHGEBS – ME, 1991, p. 39), mas "Calcular média moda e mediana para caracterizar uma distribuição", neste caso a distribuição de idades de macacos de um jardim zoológico já é um conhecimento do 3º ciclo (DEB – ME, 01/02, p. 24).

Se a mediana é 6,5 e as idades são números inteiros com valores 5, 6, 7 e 8, a mediana terá sido obtida por média aritmética dos dois valores centrais 6 e 7.

5 5 5 6 6 6 ***6*** ***7*** … 8 8

Se há sete macacos com idades menores ou iguais a seis anos, também tem de haver sete macacos com idades maiores ou iguais a sete anos. Havendo dois com oito anos, então haverá cinco macacos com sete anos (2 + 5 = 7).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão exige o domínio de um único conhecimento do 3º ciclo – cálculo da mediana de um conjunto de dados.

- **Operações envolvidas**

  Análise e interpretação da tabela e raciocínios dedutivos para compor a sequência de idades, para que a mediana seja 6,5.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é **uni-estrutural**.

Questão 4

4. Qual das opções seguintes apresenta dois números irracionais?

Assinala a opção correcta.

☐ $\sqrt[3]{8}$; π ☐ $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{27}$ ☐ $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{27}$ ☐ $\sqrt{3}$; π

Critérios específicos de classificação:

4...**5 pontos**

Assinala a opção correcta $(\sqrt{3};\pi)$ 5

Resolução proposta

A opção que apresenta dois números irracionais é $\sqrt{3}$ e π.

A resposta exige que se saiba "Relacionar números reais com o tipo de dízimas que os representam" (DEB – ME, 01/02, p. 55), mais concretamente que os números irracionais se representam por dízimas infinitas não periódicas.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Está envolvido um único conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínio dedutivo para relacionar um número irracional com a dízima que o representa.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta a esta questão é de nível **uni-estrutural**.

Questão 5

5. Uma loja de um jardim zoológico oferece, diariamente, à Liga dos Animais do Zoo, 6% do seu lucro.
No final de um certo dia, a Liga dos Animais do Zoo recebeu 15 euros dessa loja.

Qual foi o lucro da loja nesse dia?

Assinala a opção correcta.

☐ 50 euros ☐ 90 euros ☐ 250 euros ☐ 350 euros

Critérios específicos de classificação:

5... **5 pontos**

Assinala a opção correcta (250 euros).. 5

Resolução proposta

Nesse dia o lucro da loja foi 250 euros.

Um aluno em final do 2º ciclo pode, perfeitamente, calcular 6% de cada uma das opções e ver qual delas dá 15, já que "Resolver problemas da vida corrente que envolvam a aplicação directa de uma percentagem" é um objectivo do programa (DHGEBS – ME, 1991, p. 38).

Utilizar uma regra de três simples **ou** uma proporção **ou** uma equação são conhecimentos do 3º ciclo.

Exemplo:

Seja x o lucro que a loja teve nesse dia, $\frac{x}{15} = \frac{100}{6} \Leftrightarrow x = \frac{15 \times 100}{6} \Leftrightarrow x = 250$.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Tendo em conta o conhecimento descrito pelo objectivo atrás referido, a questão pode ser resolvida por um aluno que esteja a frequentar o ciclo de estudos anterior ao 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Raciocínios de carácter dedutivo para, através de uma estratégia simples de aplicação de uma percentagem, chegar à resposta correcta.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e não fechada.

- **Categorização**

  A questão permite resposta **pré-estrutural** (5.a) ou uni-estrutural (5.b) ou multi-estrutural (5.c).

Questão 6

6. Escreve, na forma de uma fracção, em que o numerador e o denominador sejam números naturais, um número, x , que verifique a condição seguinte:

$$\sqrt{5} < x < 2,5$$

Resposta:____

Critérios específicos de classificação:

6...**5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente, apresentando um número, na forma pedida, que verifica a
Condição 5
Apresenta um número racional, sem ser na forma pedida, que verifica a condição 2
Dá outra resposta..0

Resolução proposta

Um número que está nas condições pedidas é, por exemplo. 2,4 $=\frac{24}{10}$ ou $\frac{12}{5}$.

Pede-se um número que esteja entre $\sqrt{5} = 2,236...$ e 2,5 sob a forma de fracção, isto é um enquadramento de um número real. "Comparar números reais" é um objectivo do programa do 3º ciclo, 01/02, página 56.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Exige-se o domínio de um único conhecimento de grau adequado ao nível de escolaridade em presença.

- **Operações envolvidas**

  Calcular com a máquina a dízima que representa $\sqrt{5}$. Fazer um raciocínio dedutivo, para encontrar um número que esteja nas condições solicitadas.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é não única, mas do mesmo tipo.

- **Categorização**

  A questão permite resposta ao nível **uni-estrutural**.

Questão 7

7. Considera o sistema seguinte:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + \dfrac{y}{2} = 2 \end{cases}$$

Qual dos pares ordenados (x, y) seguintes é solução do sistema?

Assinala a opção correcta.

☐ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ☐ $(0,1)$ ☐ $(0,4)$ ☐ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Critérios específicos de classificação:

7....**5 pontos**

Assinala a opção correcta $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 5

Resolução proposta

A opção correcta é $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

$$2 \times \frac{1}{2} + 0 = 1 + 0 = 1 \quad \wedge \quad 4 \times \frac{1}{2} + \frac{0}{2} = 2 + 0 = 2$$

Para resolver a questão há que dominar o conhecimento descrito pelo objectivo "Verificar se um par ordenado é solução de um sistema" (DEB – ME, 01/02, p. 52).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Está envolvido apenas um conhecimento do 3º ciclo – 9º ano.

- **Operações envolvidas**

  Verificar, através de raciocínio dedutivo, qual dos pares ordenados torna verdadeiras as duas afirmações que compõem o sistema.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A resposta à questão é do tipo **uni-estrutural**.

Questão 8

8. Administrou-se um medicamento a um chimpanzé doente.

Uma hora depois, mediu-se a massa, em miligramas, de medicamento existente no sangue do chimpanzé.

Repetiu-se, de meia em meia hora, essa medição.

Cada um dos pontos representados no referencial da Figura 1 corresponde a uma medição.

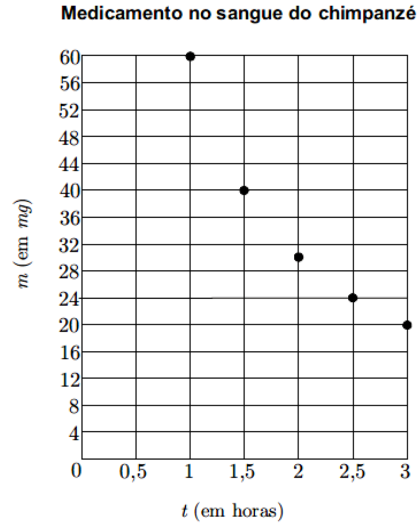


Figura 1

Observando esses pontos, podemos saber a massa, *m*, em miligramas, de medicamento existente no sangue do chimpanzé, em cada um dos instantes em que as medições foram feitas.

No referencial, *t* designa o tempo, em horas, decorrido desde o instante em que se administrou o medicamento.

8.1. Qual é a massa, em miligramas, de medicamento no sangue do chimpanzé, uma hora e meia depois da sua administração?

Resposta: ___________________________

8.2. Tal como os valores obtidos nas medições sugerem, tem-se que, para $1 \leq t \leq 3$, a massa de medicamento existente no sangue do chimpanzé e o tempo são grandezas inversamente proporcionais.

Qual é, nestas condições, a constante de proporcionalidade?

Resposta: ___________________________

8.3. Qual das expressões seguintes relaciona, para $1 \leq t \leq 3$, as variáveis *m* e *t?*

Assinala a opção correcta.

☐ $m = \dfrac{60}{t}$ ☐ $m = \dfrac{120}{t}$ ☐ $m = 60\,t$ ☐ $m = 120\,t$

Critérios específicos de classificação:

8.1. ....**5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente (40 ou 40 *mg*)..5
Dá outra resposta 0

8.2. .... **5 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente (60) 5
Dá outra resposta 0

8.3…..**5 pontos**

Assinala a opção correcta $\left(m = \dfrac{60}{t}\right)$ 5

Resolução proposta – 8.1

A massa de medicamento no sangue uma hora e meia depois da sua administração é 40 miligramas.

"Interpretar e explorar gráficos que lhe sejam fornecidos" é um objectivo do programa do 9º ano, ME, 01/02, página 54, conhecimento que o aluno deve dominar.

A resposta obtém-se por leitura imediata, no gráfico da figura 1, da ordenada que corresponde à abcissa 1,5.

Resolução proposta – 8.2

A constante de proporcionalidade é 60.

O enunciado do item já diz que as grandezas, tempo e massa, são inversamente proporcionais. Assim, o aluno apenas tem de calcular o valor da constante de proporcionalidade, fazendo a leitura das duas coordenadas (*m*, *t*), de cada um dos pontos assinalados no gráfico da figura 1 e encontrando o seu produto, pondo à prova o conhecimento descrito pelo objectivo "Reconhecer situações de proporcionalidade inversa, indicando a constante de proporcionalidade" (DEB – ME, 01/02, p. 54):

$1\times 60 = 60$; $1{,}5\times 40 = 60$; $2\times 30 = 60$; $2{,}5\times 24 = 60$; $3\times 20 = 60$

Resolução proposta – 8.3

A expressão que relaciona *m* e *t* é $m = \dfrac{60}{t}$.

Tal como foi visto em 8.2 $m\times t = 60$ é uma equação literal.

Resolvida em ordem a m fica : $m\times t = 60 \Leftrightarrow m = \dfrac{60}{t}$.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Cada um dos três itens envolve um único conhecimento do 3º ciclo.

- **Operações envolvidas**

  Leitura e interpretação do enunciado e análise do gráfico. Procura das respostas, através de raciocínio dedutivo, por observação do gráfico.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas.

- **Categorização**

  Cada um dos itens permite uma resposta **uni-estrutural**.

Questão 9

9. Resolve a equação seguinte:

$$x\left(-2x-3\right)=1$$

Apresenta os cálculos que efectuaste.

Critérios específicos de classificação:

9. .... **6 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

Desembaraçar a equação de parêntesis 1

Obter uma equação equivalente à dada, na forma $ax^2 + bx + c = 0$ 1

Substituir correctamente, na fórmula resolvente, *a*, *b* e *c* pelos respectivos valores 2

Determinar as soluções da equação -1 e $\left(-\frac{1}{2}\right)$ (**ver nota**) 2

Nota – Se o examinando obtiver apenas uma das soluções da equação, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2.º Processo

A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

Verificar que –1 é solução 2

Verificar que – 1/2 é solução 2

Referir que uma equação do 2.º grau não tem mais do que duas soluções 2

Resolução proposta

As soluções da equação são – 1 e $-\frac{1}{2}$.

“Resolver equações do 2º grau, procurando utilizar o processo mais adequado a cada situação” é um objectivo do 9º ano, ME – 01/02, p. 59.

<u>1º processo</u>

$$x(-2x-3)=1 \Leftrightarrow -2x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times(-2)\times(-1)}}{2\times(-2)}\ldots$$

<u>2º processo</u>

Determinar o valor numérico da expressão $x(-2x-3)$ quando $x=-1$ e $x=-\frac{1}{2}$ e ver que é igual a 1.

Saber que a equação não tem mais do que duas soluções.

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve o domínio de mais do que um conhecimento.

- **Operações envolvidas**

  Utilização de raciocínios dedutivos para, através de uma forma sequencial ou por tentativas, encontrar as soluções da equação

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única mas não fechada.

- **Categorização**

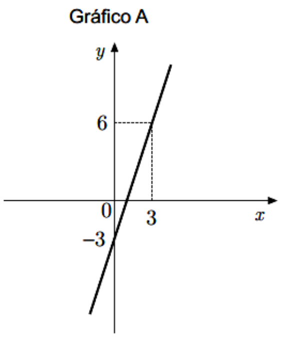
  A resposta à questão é **multi-estrutural**.

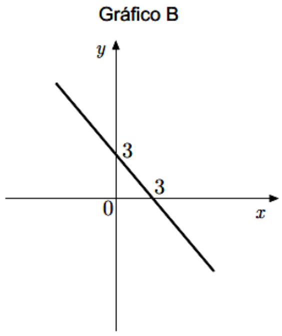
Questão 10

10. Considera a função definida por $f(x) = x + 3$

Nem o gráfico A nem o gráfico B representam a função *f*.

Apresenta uma razão que te permita garantir que o gráfico A **não** representa a função *f*, e uma razão que te permita garantir que o gráfico B **não** representa a função *f*.





Critérios específicos de classificação:

10...**6 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Apresenta, para cada um dos gráficos, uma razão que justifica a sua rejeição.......6
Apresenta, para apenas um dos gráficos, uma razão que justifica a sua rejeição.......3
Dá outra resposta.......0

Resolução proposta

No gráfico A a imagem de 0 é – 3, mas f(0) = 0 + 3 = 3, pelo que este gráfico não pode representar a função f. No gráfico B a imagem de 3 é 0, mas f(3) = 3 + 3 = 6, pelo que este gráfico, também, não pode representar a função f.

A partir do 8º ano, o professor responsável pela disciplina de Matemática, deverá apresentar funções recorrendo a diferentes tipos de representação – gráfica, analítica, tabelas, linguagem corrente – procurando que os alunos traduzam de uma linguagem para outra e se familiarizem com a terminologia adequada. Serão apresentados gráficos de funções do tipo $x = kx + b$ ligados a situações concretas de modo a que o aluno relacione *k* com a inclinação da recta e conheça o significado de *b* (DEB – ME, 01/02, p. 37).

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve mais do que um conhecimento de grau adequado ao nível de escolaridade em presença.

- **Operações envolvidas**

  Leitura, análise e interpretação de gráficos e comparação com a expressão analítica da função f(x), dada no enunciado. Utilização de raciocínio dedutivo para concluir que nenhuma das representações gráficas corresponde à função f(x).

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e não fechada porque há outra razão para rejeitar o gráfico B – a inclinação da recta.

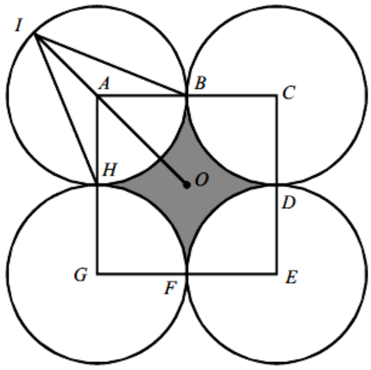
- **Categorização**

  Esta questão permite obter uma resposta de nível **multi-estrutural**.

Questão 11

11. Relativamente à Figura 2, sabe-se que:

- [*ACEG*] é um quadrado de lado 4 e centro *O*;
- os pontos *B*, *D*, *F* e *H* são os pontos médios dos lados do quadrado [*ACEG*];
- os vértices do quadrado [*ACEG*] são os centros das circunferências representadas na figura;
- o raio de cada uma das circunferências é 2 ;
- o ponto *I* pertence à circunferência de centro no ponto *A*;
- o ponto *A* pertence ao segmento de recta [*IO*].



11.1. Qual é a amplitude, em graus, do ângulo *BIH* ?
Resposta: ____________________________

11.2. Determina a área da região sombreada.

Apresenta os cálculos que efectuaste.

Escreve o resultado arredondado às décimas.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva duas casas decimais.

11.3. Determina o comprimento de [*IO]*.

Apresenta os cálculos que efectuaste.

Escreve o resultado arredondado às décimas.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva duas casas decimais.

Critérios específicos de classificação:

11.1... **5 pontos**
A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Responde correctamente (45 ou 45º) 5
Dá outra resposta 0

11.2... **5 pontos**
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Reconhecer que a área pedida é igual à diferença entre a área do quadrado
e a área dos quatro quartos de círculo 1
Calcular a área do quadrado [*ACEG*] (16) 1
Calcular a área de um quarto de círculo (π ou 3,14).. 1
Calcular a área dos quatro quartos de círculo (4 π ou 12,56) 1
Calcular a área sombreada (3,4).. 1

Nota – Se o examinando se limitar a calcular a área do quadrado e a área de um círculo,
a pontuação máxima a atribuir à sua resposta deve ser 2 pontos.

11.3... **5 pontos**
Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:
1.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Reconhecer a igualdade $\overline{IO} = \overline{IA} + \overline{AO}$ 1
Calcular $\overline{AO}$ 2
Calcular o valor pedido (4,8) 2

2.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Reconhecer a igualdade $\overline{IO}=\frac{\overline{AE}+2\times\overline{IA}}{2}$ 1
Calcular $\overline{AE}$ 2
Calcular o valor pedido (4,8) 2

Resolução proposta – 11.1

A amplitude, em graus, do ângulo BIH é 45.

Para responder correctamente, há que saber a definição de ângulo inscrito e dominar o conhecimento descrito pelo objectivo "Relacionar as amplitudes dos ângulos ao centro e ângulos inscritos com as amplitudes dos arcos correspondentes" (DEB – ME, 01/02, p. 57).
O ângulo BAH tem amplitude 90, já que é um ângulo interno do quadrado. Como A é o centro da circunferência, o ângulo BAH é um ângulo ao centro e o arco compreendido entre os seus lados tem amplitude 90, sendo o ângulo BIH um ângulo inscrito no mesmo arco de circunferência. Assim, a amplitude do ângulo BIH é metade da do ângulo BAH, ou seja 45.

Resolução proposta – 11.2

A área da região sombreada é, aproximadamente, 3,4.

A região sombreada é igual à área do quadrado menos a área de um círculo de raio 2 (quatro quartos do círculo de raio 2, fazem um círculo com o mesmo raio).

$A_{quadrado}=4^2=16$ $\qquad\qquad$ $A_{círculo}=\pi\times 2^2=4\pi$

$A_{sombreada}=16-4\pi\approx 3{,}4$ (arredondado às decimas)

O cálculo da área do quadrado e área do círculo são conhecimentos do 2º ciclo, ME – 199, páginas 20 e 40, mas "Indicar valores aproximados de um dado número real, controlando o erro" já é um objectivo do programa do 3º ciclo, ME – 01/02, página 55.

Resolução proposta – 11.3

O comprimento do segmento IO é, aproximadamente, 4,8.

"Resolver problemas, no plano e no espaço, aplicando o teorema de Pitágoras, recorrendo à calculadora sempre que aconselhável" é um objectivo do programa – 8º ano, ME – 01/02, página 35.

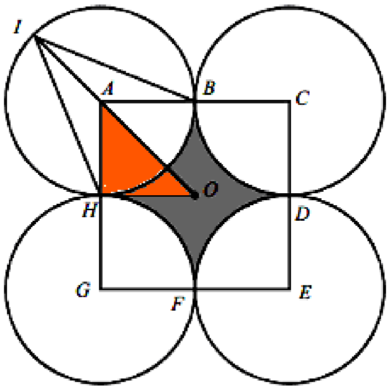
<u>1º processo</u>

$\overline{IO}=\overline{IA}+\overline{AO}$, onde $\overline{IA}=2$, já que é o raio de uma das circunferências.

Considerar $\overline{AO}$ a hipotenusa do triângulo rectângulo [AHO], cujos catetos são $\overline{IA}=\overline{AH}=2$ e $\overline{OH}=2$ porque O é o centro do quadrado.

Pelo teorema de Pitágoras: $\overline{AO}^2=2^2+2^2\Leftrightarrow\overline{AO}^2=8\Leftrightarrow\overline{AO}=\sqrt{8}$

Logo, $\overline{IO} = 2 + \sqrt{8} \approx 4{,}8$ (1 c.d.)



2º processo

$$\overline{IO} = \frac{\overline{AE}}{2} + \overline{IA} \Leftrightarrow \overline{IO} = \frac{\overline{AE}}{2} + 2 \Leftrightarrow \ldots \quad \text{onde}$$

$$\overline{AE}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GE}^2 \Leftrightarrow \ldots \overline{AE} = \sqrt{32}$$

$$\overline{IO} = \frac{\overline{AE}}{2} + 2 = \frac{\sqrt{32}}{2} + 2 = 4{,}828\ldots \approx 4{,}8$$

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  Os itens 11.1 e 11.3 envolvem mais do que um conhecimento do 3º ciclo. O item 11.2 envolve um único conhecimento deste grau de escolaridade.

- **Operações envolvidas**

  Leitura, interpretação e análise cuidada tanto do enunciado como da figura, composta por vários elementos geométricos. Raciocínios de carácter dedutivo para alcançar as respostas correctas aos três itens.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas e fechadas para 11.1 e 11.2 e não fechada em 11.3.

- **Categorização**

  Cada um dos itens 11.1 e 11.3 permite uma resposta **multi-estrutural**, e 11.2 **uni-estrutural**.

Questão 12

12. Na Figura 3, podes observar um comedouro de um camelo.
A Figura 4 representa um modelo geométrico desse comedouro. Este modelo não está desenhado à escala.

Relativamente à Figura 4, sabe-se que:

- [*ABCDI*] é uma pirâmide recta de base rectangular;
- [*ABCDEFGH*] é um tronco de pirâmide de bases rectangulares e paralelas.

Figura 3

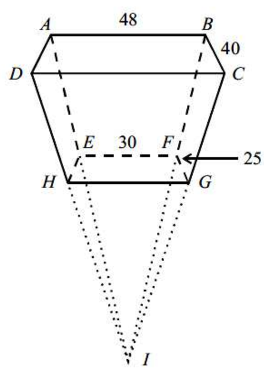


Figura 4

12.1. Qual é a posição da recta *AI* relativamente ao plano *EFG*?
Assinala a opção correcta.

- [ ] Concorrente perpendicular
- [ ] Concorrente oblíqua
- [ ] Estritamente paralela
- [ ] Contida no plano

12.2. Determina o volume, em cm^3, do tronco de pirâmide representado na Figura 4, sabendo que:

- $\overline{AB} = 48\,cm$, $\overline{BC} = 40\,cm$, $\overline{EF} = 30\,cm$ e $\overline{FG} = 25\,cm$
- a altura da pirâmide [*ABCDI*] é 80*cm*, e a altura do tronco de pirâmide é 30*cm*.

Apresenta os cálculos que efectuaste.

Nota – Nos cálculos intermédios utiliza sempre valores exactos.

12.3. A Figura 5 mostra um comedouro de um camelo.

Imaginou-se um triângulo rectângulo [*ABC*], em que o cateto [*AB*] representa o suporte do comedouro e o cateto [*BC*] representa a sombra desse suporte.

A Figura 6 é um esquema desse triângulo.

O esquema não está desenhado à escala.

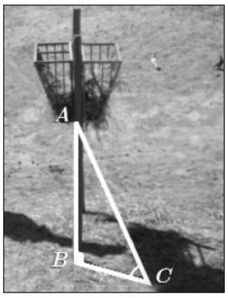


Figura 5

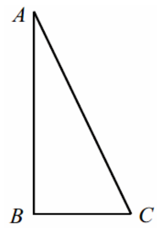


Figura 6

Sabe-se que: $\overline{AB} = 1{,}26\ m$ e $\overline{BC} = 0{,}6\ m$

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo *ACB* ?

Escreve o resultado arredondado às unidades.

Mostra como chegaste à tua resposta.

Critérios específicos de classificação:

12.1. .... **5 pontos**
Assinala a opção correcta (Concorrente oblíqua)........................ 5

12.2. .... **6 pontos**

A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:
Reconhecer que o volume pedido é igual à diferença entre o volume da pirâmide [*ABCDI*] e o volume da pirâmide [*EFGHI*] 1
Determinar o volume de uma pirâmide........................ 2
Calcular a área da base 1
Calcular o volume da pirâmide........................ 1
Determinar o volume da outra pirâmide 2
Calcular a área da base 1
Calcular o volume da pirâmide........................ 1
Indicar o volume do tronco de pirâmide (38 700 ou 38 700 cm^3) 1

12.3. .... **6 pontos**
Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

Escrever $tg.A\hat{C}B = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ 3

Calcular $A\hat{C}B$ (65 **ou** 65º)........................ 3

2.º Processo
A classificação deve ser atribuída de acordo com as seguintes etapas:

Escrever a igualdade (ou equivalente) $\overline{AB}^2 = 1{,}26^2 + 0{,}6^2$ 2

Escrever $sen.A\hat{C}B = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ **ou** $\cos.A\hat{C}B = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ 2

Calcular $A\hat{C}B$ (65 **ou** 65º) (**ver nota**) 2

Nota – Se o examinando, nos cálculos intermédios, considerar um número de casas decimais que conduza a um resultado final, bem arredondado, igual a 64º, a sua resposta não deve ser desvalorizada.

Resolução proposta – 12.1

A opção correcta é «Concorrente oblíqua».

Ao longo do 3º ciclo, o aluno familiariza-se com o conhecimento "Identificar, em modelos concretos, rectas e planos em várias posições relativas", concretamente na figura 4 (DEB – ME, 01/02, p. 61).

Resolução proposta – 12.2

O volume do tronco de pirâmide é 38700 cm^3.

Altura da pirâmide menor = 80 – 30 = 50 cm.

Determinar a área de um rectângulo é um conhecimento adquirido no 2º ciclo, programa ME – 1991, página 20. A fórmula para encontrar o volume da pirâmide faz parte do formulário anexo à prova. Assim, o aluno apenas tem que substituir, de forma correcta, os dados fornecidos pelo enunciado na fórmula e efectuar os cálculos.

$$V_{Tronco} = V_{P.Maior} - V_{P.Menor} = \frac{48\times 40\times 80}{3} - \frac{20\times 25\times 50}{3} = 51200 - 12500 = 38700$$

Resolução proposta – 12.3

A amplitude do ângulo ACB é, aproximadamente, 65.

O item exige o domínio dos conhecimentos descritos pelos objectivos "Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo", "Determinar um ângulo agudo conhecida uma das suas razões trigonométrica utilizando tabelas ou usando a calculadora" e "Indicar valores aproximados de um dado número real, controlando o erro" (DEB – ME, 01/02, pp. 60 e 55).

Seja x a amplitude do ângulo ACB.

<u>1º processo</u>

$$tg.x = \frac{1{,}26}{0{,}6} \Leftrightarrow x = tg.^{-1}\left(\frac{1{,}26}{0{,}6}\right) \Leftrightarrow x = 64{,}53... \approx 65$$

<u>2º processo</u>

$$\overline{AC}^2 = 1{,}26^2 + 0{,}6^2 \Leftrightarrow ...\overline{AC} = \sqrt{1{,}9476}$$

e

$$sen..x = \frac{1,26}{AC} \Leftrightarrow sen.x = \frac{1,26}{\sqrt{1,9476}} \Leftrightarrow x = sen.^{-1}\left(\frac{1,26}{\sqrt{1,9476}}\right) \Leftrightarrow x = 64,53...$$

Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  O item 12.1 envolve um único conhecimento e os itens 12.2 e 12.3 envolvem mais do que um conhecimento de grau adequado ao nível de escolaridade em presença.

- **Operações envolvidas**

  Leitura, interpretação e análise de toda a informação dada pelo enunciado e pelas figuras que esquematizam as situações que os itens envolvem e raciocínios dedutivos, semelhantes a outros já experimentados, e de orientação para uma correcta resolução.

- **Tipo de resposta**

  As respostas são únicas, fechadas para 12.1 e 12.2 e não fechada em 12.3.

- **Categorização**

  O item 12.1 é de resposta **uni-estrutural** e cada um dos itens 12.2 e 12. 3 **multi-estrutural**.

Questão 13

13. A Figura 7 representa um mapa de um jardim zoológico onde estão assinalados os locais de residência de alguns animais.

Figura 7

O jardim zoológico vai receber um casal de coalas.

O local de residência dos coalas, no jardim zoológico, verifica as duas condições seguintes:

- fica à mesma distância da Árvore das Aves Exóticas e do Lago das Focas;
- a sua distância à Aldeia dos Macacos é igual à distância entre o Reptilário e a Encosta dos Felinos.

Desenha a lápis, no mapa da Figura 7, uma construção geométrica que te permita assinalar o ponto correspondente ao local de residência dos coalas.

Assinala esse ponto com a letra **C**.

Nota – Não apagues as linhas auxiliares.

Critérios específicos de classificação:

13....**6 pontos**

Para assinalar, no mapa, o ponto C, o examinando tem de:
• desenhar a mediatriz do segmento de recta de extremos nos pontos correspondentes à Árvore das Aves Exóticas e ao Lago das Focas;
• desenhar a circunferência (ou arco de circunferência contido no interior do mapa) de centro no ponto correspondente à Aldeia dos Macacos e raio igual à distância entre os pontos correspondentes ao Reptilário e à Encosta dos Felinos;
• assinalar o ponto de intersecção da mediatriz com a circunferência situado dentro do mapa.

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
Desenha, com *rigor aproximado*, a mediatriz e a circunferência e assinala o ponto de intersecção situado dentro do mapa (**ver notas 1**, **2** e **3**)..6
Desenha, com *rigor aproximado*, a mediatriz e a circunferência, mas não assinala o ponto de intersecção situado dentro do mapa (**ver notas 1** e **2**)...4
Desenha, com *rigor aproximado*, só a mediatriz (**ver nota 1**)

Ou

Desenha, com *rigor aproximado*, só a circunferência (**ver nota 2**)......................................2
Dá outra resposta..0

Notas:

1. Considera-se que a mediatriz é desenhada com *rigor aproximado*, se o ponto de intersecção da recta traçada com o segmento de recta de extremos nos pontos correspondentes à Árvore das Aves Exóticas e ao Lago das Focas estiver a uma distância não superior a 0,2*cm* do ponto médio desse segmento e se o ângulo que essa recta faz com o segmento estiver compreendido entre 85º e 90º.

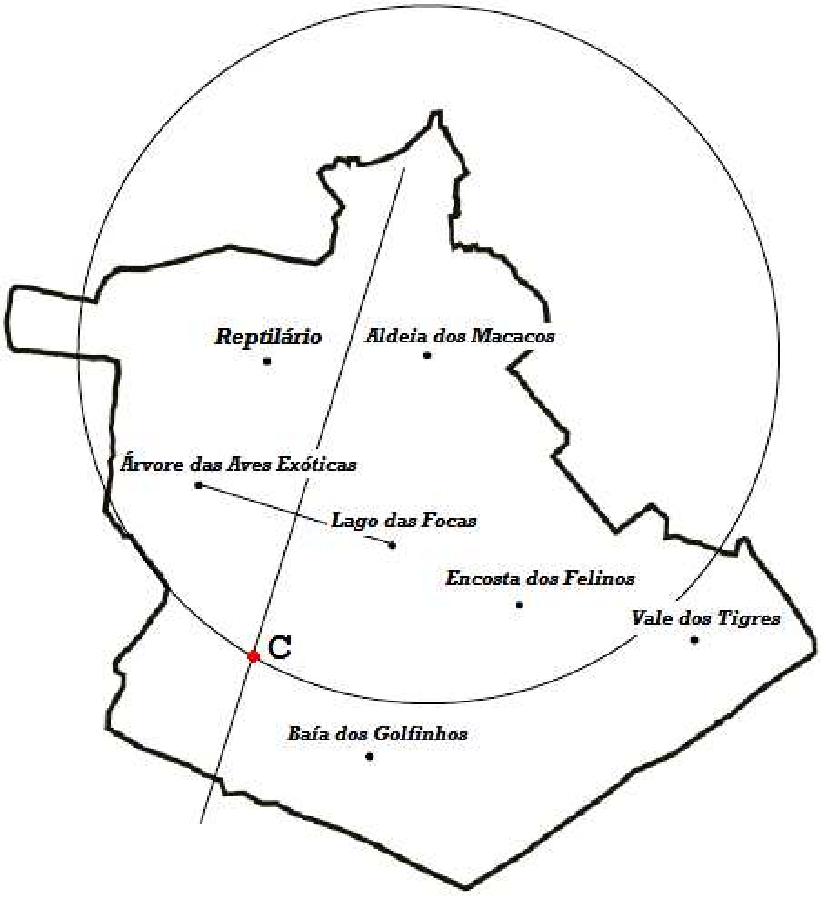
2. Considera-se que a circunferência é desenhada com *rigor aproximado*, se a distância do seu centro ao ponto correspondente à Aldeia dos Macacos não for superior a 0,2 *cm*, e se o seu raio tiver um erro não superior a 0,2 *cm*, relativamente ao valor correcto.

3. Se houver evidência de que o examinando assinalou o ponto de intersecção, embora o represente de outra forma, a sua resposta não deve ser desvalorizada.

Resolução proposta

“Desenvolver geometricamente problemas que envolvam a noção de distância entre dois pontos”, “Reconhecer que o conjunto dos pontos do plano equidistantes dos extremos de um segmento de recta é a recta perpendicular ao meio do segmento” e “Identificar o conjunto de pontos do plano ou do espaço que estão a uma distância d de um ponto dado são conhecimentos que o aluno deve dominar (DEB – ME, 01/02, p. 41).

O ponto C resulta da intersecção da mediatriz do segmento de extremos em Árvore das Aves Exóticas e Lago das Focas com a circunferência de centro na Aldeia dos Macacos e raio igual à distância entre o Reptilário e a Encosta dos Felinos.



Categorização da questão

- **Conhecimentos envolvidos**

  A questão envolve vários conhecimentos que o aluno deve articular e relacionar entre si, para assinalar o ponto C, local de residência dos Coalas.

- **Operações envolvidas**

  Construção do segmento com extremos em Árvore das Aves Exóticas e Lago das Focas, traçado da mediatriz desse segmento e de uma circunferência, com recurso a material de desenho e a raciocínios dedutivos para encontrar o ponto C.

- **Tipo de resposta**

  A resposta é única e fechada.

- **Categorização**

  A questão permite uma resposta que está ao nível **relacional**.

Quadro 5.9 - Síntese de caracterização das questões do exame nacional do 9º ano – 2010/2ª chamada

Categoria / Domínio	Pré estrutural	Uni estrutural	Multi estrutural	Relacional	Abstracto	Total de itens
Estatística e Probabilidades		1. 3.				**2**
Números e Cálculo	2. 5.a	4 5.b 6.	5.c			**4**
Álgebra e Funções		7. 8.1 8.2 8.3	9. 10.			**6**
Geometria		11.2 12.1	11.1 11.3 12.2 12.3	13.		**7**
Total de itens	**1 ou 2**	**10 ou 11**	**6 ou 7**	**1**	**0**	**19**

A categoria da resposta à questão 5 depende do conhecimento exibido na sua produção, que poderá ser de nível inferior ao 3º ciclo, pré-estrutural, ou estar ao nível do 3º ciclo e exibir apenas uma unidade de conhecimento, uni-estrutural, ou mais do que um conhecimento sem que estes estejam relacionados, multi-estrutural.

De todas as provas de exame estudadas, esta é a que tem menor número de questões com resposta de nível pré-estrutural e o número mais elevado de itens de resposta ao nível uni-estrutural em prejuízo da categoria multi-estrutural, o que implica um menor grau de dificuldade em relação às provas onde predomina a categoria de resposta multi-estrutural.

Mais uma vez a Geometria está em destaque.

Capítulo 5 – Conclusões

Este estudo pretendeu apreciar a "qualidade" das provas de avaliação externa, intituladas de exames nacionais do 9º ano que regulam o processo de ensino e aprendizagem da Matemática no 3º ciclo do ensino básico.

Após a leitura, análise e interpretação dos vários itens das questões que compõem as provas 2005/ 1ª chamada, 2006/1ª chamada, 2007/2ª chamada, 2008/1ª e 2ª chamada, 2009/1ª chamada e 2010/2ª chamada, e da elaboração de hipotéticas respostas para cada um desses itens, estes foram incorporados no respectivo domínio temático estabelecido pelo programa DEB – ME, 2001/02: Estatística e Probabilidades, Números e Cálculo, Álgebra e Funções, Geometria, e categorizadas de acordo com a grelha de caracterização das questões de provas de avaliação, apresentada no quarto capítulo e construída por Mário Ceia com base na Taxonomia SOLO como pré-estrutural, uni-estrutural, multi-estrutural, relacional e abstracto. A síntese de caracterização das questões que se apresenta no final de cada uma das provas, permite estabelecer comparações e tirar conclusões.

Aspectos gerais das provas

As provas estão, na generalidade, de acordo com as orientações curriculares e as informações de exame disponibilizadas pelo GAVE, contemplando itens de diferentes tipologias, sobre os diversos conteúdos e que avaliam as várias competências. Os enunciados das questões são simples, curtos e transmitem a informação necessária por si só ou por tabelas ou imagens ilustrativas, claras e exemplificativas das situações descritas. Raras são as provas que têm itens ou questões com enunciados extensos e demasiada informação que é supérflua e enganadora. A linguagem utilizada é acessível e adequada aos alunos. Existem provas mais e outras menos exigentes ao nível dos raciocínios e da matemática envolvida.

O modelo de caracterização destas provas de avaliação de final do Ensino Básico, mostra-se consistente, apesar de surgirem indecisões em relação à categorização de alguns itens/questões nos diferentes níveis descritos na Taxonomia SOLO já que, dependendo do caminho que o aluno escolha para os resolver, podem surgir processos de cálculo, geométrico ou geométricos com utilização de menos ou mais conhecimentos que tenham que, eventualmente ser relacionados. Assim, por exemplo, na questão 6. da prova de 2005/1ª chamada para encontrar um número irracional entre 4 e 5 a questão pode ser multi-estrutural se o aluno construir uma dizima infinita não periódica do tipo 4,01001000100001 … ou relacional se a dizima for construída à custa de $\sqrt{2}$, que o aluno conhece como número irracional, $3 + \sqrt{2}$.

Após nove anos de estudos, o aluno tem em sua posse várias ferramentas matemáticas que poderá utilizar quando solicitado a resolver qualquer item, questão ou problema adequado ao seu nível de escolaridade. Nada nem ninguém o impede que utilize o caminho que quiser seguir, sendo que o mais provável é que siga o que lhe é familiar e, obviamente, o mais fácil. Não acredito que um aluno perante uma equação do 2º grau, opte por não a resolver pelo método que aprendeu a trabalhar e, por tentativa e erro, encontre as soluções da equação, ou por observação de uma figura/imagem que lhe salte à vista um triângulo rectângulo não pense, imediatamente, na possibilidade de ter que usar o teorema de Pitágoras, ao invés de relacionar as áreas dos triângulos – Item 11.2, 2008/1ª chamada. São estes processos alternativos de resolução perfeitamente válidos que, por utilizarem um ou mais conhecimentos ao nível do 3º ciclo, conduzem a indecisões na categorização das questões nos níveis SOLO e que fazem que um determinado item/questão possa ocupar um lugar indefinido no quadro-síntese de cada uma das provas analisadas.

Feita uma análise grosseira sobre todas as questões dos exames que não constam neste trabalho de investigação, concluo que a estrutura destas provas não tem questões ao nível abstracto nem mais do que duas ao nível relacional, a maioria das provas privilegia a Geometria e o nível multi-estrutural com excepção das provas 2008/1ª chamada, 2008/2ª chamada e 2010/2ª chamada em que o nível uni-estrutural está mais representado. O exame 2008/1ª chamada revela-se o de menor grau de dificuldade dado que possui muitos itens do nível pré-estrutural e uni-estrutural, nenhum relacional e apenas quatro ou cinco multi-estrutural, o que fez surgir à época críticas por parte de professores, meios de comunicação e associações de pais e encarregados de educação. A 2ª chamada/2008 contempla o domínio Álgebra e Funções e o nível uni-estrutural mas tem duas questões do tipo relacional enquanto 2010/2ª chamada tem apenas uma questão relacional e dez ou onze itens do nível uni-estrutural.

Os quadros síntese dão uma visão mais clara da panorâmica de cada uma das provas.

Análise por temas curriculares

Num passado muito recente, subestimou-se a ênfase da Geometria como tema da Matemática. Mas, na actualidade, a Geometria voltou a fazer parte integrante e relevante no ensino da disciplina e assume uma grande importância no programa do 3º Ciclo. Acontece que nas questões das provas de exame relacionadas com a geometria é mais valorizado o cálculo do que o raciocínio geométrico e a sua explicitação, sabendo-se que este tipo de raciocínio formula hipóteses, selecciona estratégias, verifica soluções e desenvolve uma forma de pensar, a imaginação e a intuição necessárias à resolução de problemas geométricos que requerem o uso de material de desenho e de medição.

Das doze provas por mim analisadas, nove têm um item ou uma questão de traçado geométrico onde na maioria das vezes se recorre à aplicação de vários conhecimentos que fazem parte do tema Lugares Geométricos. Em todas as provas aparece a Trigonometria do Triângulo Rectângulo, a partir da análise de uma situação concreta associada ao real. O cálculo do volume de um objecto da vida real composto por um ou mais do que um sólido geométrico, por um tronco de uma pirâmide ou de um cone (11*)[1], o estudo da circunferência relacionado com os elementos geométricos que lhe estão directamente

[1] Frequência com que o tema aparece nos 12 exames.

ligados como, por exemplo, ângulos ao centro, ângulos inscritos e polígonos inscritos – suas propriedades e relações (10*), Posição Relativa de Rectas e Planos (9*), e Teorema de Pitágoras (7*) são temas com uma presença notável. Rotações de um polígono regular inscrito na circunferência (2*) e rotação de 90º de um polígono não regular e não inscrito na circunferência (2*), razão e semelhança de figuras (2*) e outros conteúdos são menos frequentes no âmbito da Geometria. Total ausência de Translações!

No domínio Álgebra e Funções aparecem gráficos para analisar, interpretar e retirar informação sobre várias situações como, por exemplo viagens, relacionar a expressão analítica com a representação gráfica e vice-versa, ou dizer qual o gráfico que representa a relação entre duas variáveis, dependente e independente, de entre as quais se destaca a relação de proporcionalidade inversa (7*). Uma equação do 2º grau completa (9*) sem estar associada a qualquer contexto aparece para fazer a sua resolução, à excepção de um exame onde, em escolha múltipla, se deve assinalar a equação que é equivalente à dada. Os sistemas de duas equações a duas incógnitas (8*) solicitam, em escolha múltipla, o par ordenado que é sua solução ou, também em escolha múltipla, qual o sistema que traduz o problema enunciado, ou é dada uma das equações e pede-se a segunda equação do 1º grau que permita completar o sistema, de modo que este traduza o problema apresentado, ou dão o sistema e perguntam qual o par ordenado (x, y) que é sua solução sem pedir que se resolva o sistema. Alguns problemas apresentados poderão ser resolvidos através de um sistema, de uma equação do 1º grau a uma incógnita ou por uma estratégia de resolução adequada. Solicita-se a resolução de uma inequação (7*) completamente "a nu" e apenas num exame um problema pode ser traduzido e resolvido por uma condição.

Em Números e Cálculo os itens variam muito: múltiplos e divisores de um número, mínimo múltiplo comum entre dois números, sequências de números, notação científica, cálculo de uma percentagem, etc. Mas, Intervalos de Números Reais é muito frequente (10*). Apresenta-se o intervalo e, por exemplo, pergunta-se em escolha múltipla qual o número ou menor número inteiro que lhe pertence, ou qual o conjunto que define o intervalo apresentado e vice-versa, ou a representação geométrica ou analítica do intervalo e vice-versa, ou qual ou quais os números de um dado conjunto que são irracionais, ou pede um número irracional compreendido entre dois números dados …

O cálculo de Probabilidades muito simples (11*) onde se determina a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis aparece muitas vezes, salvo raras excepções onde se pode recorrer a uma pequena árvore de probabilidades, a uma tabela de dupla entrada ou a uma equação para determinar a probabilidade pedida. A Estatística está menos presente mas, ainda assim, recorre a tabelas informativas para pedir média aritmética e mediana de um conjunto de dados, ou fazer a ligação para o cálculo de uma probabilidade, ou estabelecer a relação entre os dados fornecidos pela tabela e o gráfico que lhe corresponde, ou passar a informação de um gráfico circular para um gráfico de barras.

Em itens pertencentes à mesma questão é, por vezes, visível a conexão entre conteúdos de diferentes domínios temáticos, o que permite a compreensão de relações entre ideias matemáticas, possibilita modos diferentes de pensar uma dada situação e, enriquece e diversifica a estrutura da respectiva prova de avaliação.

Para terminar …

O alargamento da escolaridade obrigatória e a possibilidade de muitos jovens poderem aceder ao ensino provocaram um acréscimo muito significativo de alunos nas escolas públicas.

A grande diversidade de alunos do ponto de vista etário, cultural e social, que frequenta o ensino pode ser encarada como um contributo para a construção de uma sociedade plural na qual todos os intervenientes têm um papel a desempenhar. No contexto desta diversidade, a avaliação enquanto parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, constitui um instrumento certificador das diversas aquisições e aprendizagens realizadas pelo aluno ao longo do seu percurso escolar.

O aumento do número de alunos e a necessidade do sistema educativo avaliar as suas aprendizagens na disciplina de Matemática levou à criação das provas de avaliação externa, primeiro as provas de aferição e desde 2005 os exames nacionais para o 3º Ciclo do Ensino Básico.

Os processos de avaliação do conhecimento matemático têm sido alvo de um interesse generalizado, já que os alunos têm vido a obter resultados muito aquém de um aproveitamento considerado satisfatório. A publicitação dos resultados dos exames nacionais tem provocado um coro de recriminações e lamentações, surgindo reparos sobre a forma como o conhecimento em Matemática é avaliado e sobre como os exames são concebidos e construídos.

Estes comentários, surgidos de vários sectores sociais, associações profissionais e instituições de ensino dificilmente podem vir a ser contributos relevantes para a melhoria quer da avaliação externa, quer dos resultados porque são opiniões sem suporte em critérios fiáveis.

O sucesso escolar é fortemente dependente da preparação anterior do aluno e do seu maior ou menor “talento natural” para a disciplina, embora seja igualmente condicionado por outros factores tais como o interesse, o empenho e o gosto por aprender. O insucesso a Matemática é visto como um processo cumulativo que, uma vez desencadeado, se torna virtualmente irreversível. Muitos alunos têm essa ideia interiorizada e facilitada por um sistema que lhe permite percorrer toda a escolaridade básica com nota negativa na disciplina. Mas, não é só na aprendizagem da matemática que existem problemas …

Em Portugal a imagem social da escola tem vindo a degradar-se. Assiste-se a um crescente desinteresse dos jovens pela escola, a uma despreocupação dos pais e encarregados de educação pela vida escolar dos seus educandos e a uma relação cada vez mais difícil entre a escola e a família.

A existência de manuais escolares com níveis diferentes de profundidade no tratamento dos conteúdos e no estilo de tarefas apresentadas, especialmente no 3º ciclo, mostra que existem interpretações muito diversas de um mesmo programa e sugere que o tratamento dos temas matemáticos tem grandes flutuações de escola para escola e de professor para professor.

Para aproximar os alunos da Matemática, é crucial a intervenção do professor, dos matemáticos em geral, políticos ligados à administração educativa, jornalistas, autores de material didáctico e das associações de pais e encarregados de educação.

O programa de Matemática do ensino básico – PMEB 2007 e generalizado a todo o ensino básico no ano lectivo 201 0/11, constitui um reajustamento do anterior e organiza-se por ciclos de escolaridade e não por anos. O documento destaca três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática: resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação, e estrutura-se, ao longo dos ciclos, em quatro grandes temas: Números e operações, Álgebra, Geometria e Organização e tratamento de dados.

Em cada ciclo, na introdução de cada tema matemático e das capacidades transversais é apresentada a articulação entre o programa do ciclo em questão e o ciclo anterior relativa a esse tema ou capacidade.

Os tópicos e objectivos associados constituem uma clarificação dos assuntos que devem ser trabalhados no âmbito do respectivo tema ou capacidade matemática, sendo complementados por notas que procuram esclarecer o seu alcance e proporcionar sugestões metodológicas para o professor. Estes tópicos são apresentados de forma sistematizada e sintética e, na maior parte dos casos, o seu tratamento em sala de aula terá de seguir uma lógica muito diferente da que orienta a sua apresentação no programa. Assim, este novo programa não deve ser lido como um guia directo para o trabalho do professor em cada tema, mas sim como uma especificação dos assuntos que devem ser trabalhados em cada ciclo e dos objectivos gerais e específicos a atingir.

O espírito profissional do professor está presente na elaboração do projecto curricular da disciplina, na selecção dos materiais didácticos, no modo como lida com as dificuldades de aprendizagem da população escolar, na definição de metas ambiciosas para o envolvimento dos alunos com a Matemática e com a programação de actividades para a sua formação. Elementos fundamentais desse espírito são a elaboração de projectos, tendo por base o diagnóstico dos problemas e situações, a colaboração, avaliação e reflexão sobre os resultados, as práticas e as finalidades.

A matemática é a ciência das regularidades e da linguagem dos números, das formas e das relações. O seu ensino continua a ter o objectivo de promover a formação de cidadãos autónomos, participativos na sociedade, críticos e confiantes.

Referências

Abrantes, P.; Leal, L.; Teixeira, P. e Veloso, E. "*Inovação Curricular em Matemática.*", Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.

APM. "*Renovação do Currículo de Matemática*.", Lisboa, APM, 1998.

APM.*"Matemática 2001. Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*.", Lisboa, APM, 1998.

Biggs, J. B.; Collis, K. F. "*Evaluating the quality of learning: the SOLO taxonomy*.", Academic Press, 1982.

Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Vale. I.; Pimentel, T. "*A experiência matemática no ensino básico."* Lisboa, DGIDC, 2008.

Ceia e Duarte. "*Os exames e a taxonomia SOLO*.", Comunicação apresentada no *XXI* Seminário de Investigação em Educação Matemática, Aveiro, 2002.

Ceia, M. "*A taxonomia SOLO e os níveis de Van Hiele*.", Comunicação apresentada no XI Encontro de Investigação em Educação Matemática, Coimbra, 2002.

Ceia, M. Artigo: "*100515SOLOExames*.", SIEM, Aveiro, 2010.

Ceia, M. Poster: "*PosterAnalExaQuestPubl*.", CERME7. Polónia, 2011.

Ceia, M. Artigo: "*110507ExamesÁlgebra."*, EIEM. Póvoa de Varzim, 2011.

Ceia, M. Artigo: "*SO_Ceia*. PME35.", Turquia, 2011.

CNEB. "*Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências essenciais*.", Lisboa, Ministério de Educação, 2001.

DBE – ME. "*Reorganização Curricular do Ensino Básico",* Lisboa, 2001.

DEB – ME. *"Programa de Matemática. Ensino Básico – 2º Ciclo."*, Imprensa Nacional Casa da Moeda, 1998.

DEB – ME. *"Programa de Matemática. Ensino Básico – 3º Ciclo."*, Imprensa Nacional Casa da Moeda, 2000.

DGEBS. "*Organização curricular e programas do Ensino Básico – 3º ciclo*.", Direcção Geral dos Ensino Básico e Secundário, Lisboa, 1991.

DGIDC. "*Plano de acção para a Matemática*.", Lisboa, ME, 2006.

Graça M. *Avaliação da resolução de problemas* (Tese de mestrado. Universidade de Lisboa). Lisboa, APM, 1995.

Hattie, J. A. C., e Brown, G. T. L. "*The Solo taxonomy*." University of Auckland/Ministry of Education, 2004.

Kulm, G. (Ed). "*Assessing higher order thinking in mathematics*.", American Association for the Advancement of Science Press, 1990.

Martins, M. P. *A avaliação das aprendizagens em Matemática* (Tese de mestrado. Universidade Católica Portuguesa), Lisboa, APM, 1996.

Menezes, L.; Santos. "*Avaliação em Matemática: Problemas e desafios*.", Viseu, SPCE, 2008.

NCTM. "*Princípios e normas para a matemática escolar*.", Lisboa, APM, 2007.

Nunes, C. A *avaliação como regulação do processo de ensino – aprendizagem da Matemática* (Tese de mestrado). Universidade de Lisboa, 2004.

Pinto, J. e Santos, L. *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa, Universidade Aberta, 2006.

Ponte, J. *O ensino da Matemática em Portugal: Uma Prioridade Educativa?* Seminário "O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas". Lisboa (2002), 2003.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e oliveira, P. "*Programa de Matemática do Ensino Básico*.", Lisboa, Ministério da Educação, 2007.

Projecto AREA. Universidade de Lisboa.

Santos, L. "*Auto-avaliação regulada*. *Avaliação das aprendizagens* (p.77-84).", Lisboa, Ministério da Educação, 2002.

Santos, L. e Dias, S. *Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores?* Actas do ProfMat2006, Lisboa, APM, 2006.

Santos, L. e Pinto, J. *O que pensam os alunos sobre a avaliação*? Educação e Matemática, 74, 2003.

Technical Report 43. University of Auckland. Ministry of Education, 2004. (acedido no dia 12 de Dezembro de 2010 em www.google.pt.).

Sites:
www. google. pt
www. gave.edu.pt